Lösung Blatt 0, Aufgabe 2 und 3

Aufabe 2 (5 Punkte)

Es sei $(X, Y) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'')$ ein Zufallsvektor und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Borel-Raum. Weiter sei $h : (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'') \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ eine quasi-integrierbare Funktion und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, bzgl. derer Y messbar ist.

a) Zeigen Sie, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) = \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx).$$

Lösung: Diese Aufgabe kann mit dem Funktionserweiterungsargument gelst werden.

(1) $h = \mathbf{1}_{A' \times A''}$, $A' \in \mathfrak{A}'$ und $A'' \in \mathfrak{A}''$, dann gilt wegen der $\mathcal{F}$-Messbarkeit von Y:

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) &= E\left(\mathbf{1}_{A'}(X)\mathbf{1}_{A''}(Y)|\mathcal{F}\right)(\omega) \\ &= \mathbf{1}_{A''}(Y)(\omega) P(X \in A'|\mathcal{F})(\omega) \\ &= \mathbf{1}_{A''}(Y)(\omega) \int_{A'} P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \\ &= \int \mathbf{1}_{A' \times A''}(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \end{aligned}$$

fr P-f.a. ω.

(2) $h = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}''$. Dies ergibt sich aus (1) mit einem Dynkinsystemargument. Sei

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'' |\ \text{Aussage gilt fr } A\}$$

$\Omega' \times \Omega'' \in \mathcal{D}$ nach (1).
$C \in \mathcal{D} \ \Rightarrow\ C^c \in \mathcal{D}$, denn:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{C^c}(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) &= 1 - \int \mathbf{1}_C(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \\ &= \int \mathbf{1}_{C^c}(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx). \end{aligned}$$

$(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ p.d. $\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{D}$, denn

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\bigcup C_n}(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\mathbf{1}_{C_n}(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \mathbf{1}_{C_n}(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \\ &= \int \mathbf{1}_{\bigcup C_n}(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx). \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ ist also ein Dynkinsystem, welches einen schnitt-stabilen Erzeuger der σ-Algebra enthlt und damit schon gleich der σ-Algebra sein muss.

(3) $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i},\ A_i \in \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}''$. Dann gilt:

$$E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(X,Y)|\mathcal{F}\right)(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i E(\mathbf{1}_{A_i}(X,Y)|\mathcal{F})(\omega)$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i \int \mathbf{1}_{A_i}(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \ = \ \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx)$$

fr P-f.a. ω.

(4) $h \geq 0$, dann existiert eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ primitiver Funktionen mit $h_n \nearrow h$. Es folgt mit monotoner Konvergenz

$$E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) \ = \ E(\lim_{n\to\infty} h_n(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) \ = \ \lim_{n\to\infty} E(h_n(X,Y)|\mathcal{F})(\omega)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int h_n(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \ = \ \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx)$$

fr P-f.a. ω.

(5) h quasi-integrierbar, also $h = h^+ - h^-$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) &= E(h^+(X,Y) - h^-(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) \\ &= E(h^+(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) - E(h^-(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) \\ &= \int h^+(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) - \int h^-(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \\ &= \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx) \end{aligned}$$

fr P^Y-f.a. ω.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $g : (\Omega', \mathfrak{A}') \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, für das $g(X)$ quasi-integrierbar ist, gilt

$$E(g(X)|Y = y) = \int g(x) P^{X|Y=y}(dx) \qquad P^Y\text{-fast sicher.}$$

Lösung: Wir benutzen das Funktionserweiterungsargument.

(1) $h = \mathbf{1}_A,\ A \in \mathfrak{A}'$, dann gilt:

$$E(h(X)|Y = y) \ = \ E(\mathbf{1}_A(X)|Y = y) \ = \ P(X \in A|Y = y)$$
$$= P^{X|Y=y}(A) \ = \ \int_A dP^{X|Y=y} \ = \ \int \mathbf{1}_A(x) P^{X|Y=y}(dx) \ P^Y\text{-f.s.}$$

(2) $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i},\ A_i \in \mathfrak{A}'$. Dann gilt:

$$E(h(X)|Y = y) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(X)|Y = y\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(\mathbf{1}_{A_i}(X)|Y = y)$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i \int \mathbf{1}_{A_i}(x) P^{X|Y=y}(dx) \ = \ \int h(x) P^{X|Y=y}(dx) \ P^Y\text{-f.s.}$$

(3) $h \geq 0$, dann existiert eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ primitiver Funktionen mit $h_n \nearrow h$. Es folgt mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned} E(h(X)|Y=y) &= E(\lim_{n\to\infty} h_n(X)|Y=y) = \lim_{n\to\infty} E(h_n(X)|Y=y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int h_n(x) P^{X|Y=y}(dx) = \int h(x) P^{X|Y=y}(dx) \ P^Y\text{-f.s.} \end{aligned}$$

(4) h quasi-integrierbar, also $h = h^+ - h^-$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E(h(X)|Y=y) &= E(h^+(X) - h^-(X)|Y=y) \\ &= E(h^+(X)|Y=y) - E(h^-(X)|Y=y) \\ &= \int h^+(x) P^{X|Y=y}(dx) - \int h^-(x) P^{X|Y=y}(dx) \\ &= \int h(x) P^{X|Y=y}(dx) \ P^Y\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Aufabe 3 (5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ und $X, Y, X_1, X_2, \ldots$ nicht-negative bzw. integriebare Zufallgrößen.

a) Zeigen Sie, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungswerte gilt

$$X_n \to X \quad P\text{-f.s. und } \sup_{n\geq 1} |X_n| \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{A}) \quad \Rightarrow \quad E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F}) \quad P\text{-f.s.}$$

Lösung: Setze $Z_n := \sup_{k\geq n} |X_k - X|$ und $Z := \limsup_{n\to\infty} E(Z_n|\mathcal{F})$. Nach dem Lemma von Fatou ist

$$EZ \leq \lim_{n\to\infty} EZ_n = 0,$$

also $Z = 0$ und damit $E(Z_n|\mathcal{F}) \to 0$ wenn $n \to \infty$ fast sicher. Nach die Dreiecksungleichung

$$E(|X|\,|\mathcal{F}) \geq |E(X|\mathcal{F})|$$

ist aber fast sicher

$$|E(X_n|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})| \leq E(Z_n|\mathcal{F}) \to 0$$

wenn $n \to \infty$. ■

b) Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Zeigen Sie, dass die bedingte Hölder Ungleichung gilt

$$E(XY|\mathcal{F}) \leq E(X^p|\mathcal{F})^{1/p} \ E(Y^q|\mathcal{F})^{1/q}$$

Hinweis: Benutzen Sie regulär bedingte Verteilungen und die unbedingte Hölder-Ungleichung.

Lösung.

1. Variante: Wir benutzen der Hinweis. Sei $Z : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Zufallsvariable und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-algebra. Dann gilt (aus der Vorlesung) für alle $\omega \in \Omega$

$$E(Z|\mathcal{F})(\omega) = \int_\Omega Z(\omega')P^{\mathcal{F}}(\omega, d\omega') =: E^{\mathcal{F}}(Z)$$

d.h. $E(Z|\mathcal{F})$ ist der gewöhnliche Erwartungswert von Z bzgl. $P^{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$. Nach der unbedingten Hölder-Ungleichung gilt dann

$$E^{\mathcal{F}}(XY) \leq (E^{\mathcal{F}}(X^p))^{1/p}(E^{\mathcal{F}}(Y^q))^{1/q}$$

fast für alle $\omega \in \Omega$. $\blacksquare$

2. Variante: Sei $U := E(X^p|\mathcal{F})^{1/p}$, $V := E(Y^q|\mathcal{F})^{1/q}$ Zufallsvariablen und die Menge $H := \{U > 0, V > 0\}$. Wir zeigen das $E(XY|\mathcal{F})\mathbf{1}_H \leq UV\mathbf{1}_H$ f.s. da

$$E(X^p\mathbf{1}_{\{U=0\}}) = E(E(X^p\mathbf{1}_{\{U=0\}}|\mathcal{F})) = E(\mathbf{1}_{\{U=0\}}E(X^p|\mathcal{F})) = E(\mathbf{1}_{\{U=0\}}U^p) = 0$$

$$\Rightarrow X\mathbf{1}_{\{U=0\}} = 0 \text{ f.s.} \Rightarrow E(XY|\mathcal{F})\mathbf{1}_{\{U=0\}} = E(XY\mathbf{1}_{\{U=0\}}|\mathcal{F}) = 0$$

$$\text{gleich Argument} \quad E(XY\mathbf{1}_{\{V=0\}}) = 0.$$

Um $E(XY|\mathcal{F})\mathbf{1}_H \leq UV\mathbf{1}_H$ f.s. zu seigen, zeigen wir, dass für alle $A \in \mathcal{F}$

$$E\left(\frac{E(XY|\mathcal{F})}{UV}\mathbf{1}_H\mathbf{1}_A\right) \leq E\mathbf{1}_A \tag{1}$$

gilt, weil aus (1) folgt

$$\frac{E(XY|\mathcal{F})}{UV}\mathbf{1}_H \leq 1 \qquad \text{f.s.}$$

Sei $A \in \mathcal{F}$, dann

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{E(XY|\mathcal{F})}{UV}\mathbf{1}_H\mathbf{1}_A\right) &= E\left(E\left(\frac{XY}{UV}\mathbf{1}_{H\cap A}\Big|\mathcal{F}\right)\right) \\
&= E\left(\frac{X}{U}\mathbf{1}_{H\cap A}\cdot\frac{Y}{V}\mathbf{1}_{H\cap A}\right) \\
\text{unbedingte Hölder-Ungleichung} &\leq \left(E\left(\frac{X^p}{U^p}\mathbf{1}_{H\cap A}\right)\right)^{1/p}\left(E\left(\frac{Y^q}{V^q}\mathbf{1}_{H\cap A}\right)\right)^{1/q} \\
&= \left(E\left(\frac{E(X^p|\mathcal{F})}{U^p}\mathbf{1}_{H\cap A}\right)\right)^{1/p}\left(E\left(\frac{E(Y^q|\mathcal{F})}{V^q}\mathbf{1}_{H\cap A}\right)\right)^{1/q} \\
&= (E\mathbf{1}_{H\cap A})^{1/p}(E\mathbf{1}_{H\cap A})^{1/q} = E\mathbf{1}_{H\cap A} \leq E\mathbf{1}_A. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$