Aufgabe 3 - Blatt 6

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration. Zeigen Sie die folgende Aussage: Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein g.i. Martingal (bzw. Supermartingal) bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, und sind $\sigma \leq \tau$ Stoppenzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, dann gilt $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ und $X_\sigma = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$ (bzw. $X_\sigma \geq \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$).

Hinweis: Für den Martingal-Fall, Aufgabe 2a) und Optional Sampling können helfen. Für den Supermartingal-Fall, die Doob-Zerlegung kann helfen

Lösung

Das Problem hier ist wenn $\tau = \infty$ f.s. (2. Bemerkung am Ende gucken). Wenn nicht, wir können alles machen was kommt. Bitte, den Beweis durch lesen und danach merken, dass alles auf die Menge $\{\tau = \infty\}$ auch gilt, wenn X_∞ als der fast sicher Grenzwert $X_\infty := \lim_{n\to\infty}$ definieren und Theorem 1 benutzen.

1. $(X_n)_{n\geq 0}$ **ist ein Martingal :**

zz: $E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$.

Nach der Definition, $A \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow \{\sigma \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge n}$. Dann, nach Optional Sampling (durch Korollar 6.19 im Skript), es folgt

$$E(X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A}) = E(X_{\sigma\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A}) \tag{1}$$

Da $(X_n)_{n\geq 0}$ ist g.i. mit Aufgabe 2a) wir wissen, dass

$$\begin{aligned}
&(X_{\tau\wedge n} : n \geq 0) \text{ g.i. ist, so ferner } \Rightarrow (X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A} : n \geq 0) \text{ auch g.i. ist} \\
&(X_{\sigma\wedge n} : n \geq 0) \text{ g.i. ist, so ferner } \Rightarrow (X_{\sigma\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A} : n \geq 0) \text{ auch g.i. ist}
\end{aligned} \tag{2}$$

Andere Seite, nach $\sigma < \tau < \infty$ es folgt

$$\begin{aligned}
X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A} &\to X_\tau \mathbf{1}_{\{\sigma\leq\infty\}\cap A} = X_\tau\mathbf{1}_A \quad \text{in W'skeit} \\
X_{\sigma\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A} &\to X_\sigma \mathbf{1}_{\{\sigma\leq\infty\}\cap A} = X_\sigma\mathbf{1}_A \quad \text{in W'skeit}
\end{aligned}$$

So, mit Theorem 1 i) $\Leftrightarrow$ iii) und (2) wir haben, dass für jede $A \in \mathcal{F}_\sigma$ es gilt:

$$\begin{aligned}
E(X_\tau\mathbf{1}_A) &= \lim_{n\to\infty} E(X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A}) \\
\text{(wegen (1))} &= \lim_{n\to\infty} E(X_{\sigma\wedge n}\mathbf{1}_{\{\sigma\leq n\}\cap A}) \\
&= E(X_\sigma\mathbf{1}_A),
\end{aligned}$$

das heißt $E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$.

zz: $E|X_\tau| < \infty$

Wir wissen, dass $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau$ als $n \to \infty$ in W'skeit und $(X_n)_{n\geq 0}$ ist g.i., dann nach Theorem 1 i) $\Leftrightarrow$ ii) es folgt

$$E|X_{\tau\wedge n}| < \infty, \qquad E|X_{\tau\wedge n}| \to |X_\tau| \text{ als } n\to\infty \quad \text{und } E|X_\tau| < \infty. \qquad \blacksquare$$

2. $(X_n)_{n\geq 0}$ ist ein Supermartingal :

Nach die Doob-Zerlegung (Satz 6.9 im Skript), existieren $(Y_n)_{n\geq 0}$ Martingal und $(Z_n)_{n\geq 0}$ $\mathcal{F}_n$-adaptiert so dass $X_n = Y_n + Z_n$. Aus den Beweis von dieser Zerlegung, mann bekommt

$$Z_n := -\sum_{i=1}^{n}(X_{i-1} - E(X_i|\mathcal{F}_{i-1})) < 0$$

da $(X_n)_{n\geq 0}$ ist ein Supermartingal, so $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist ein monoton fallend Prozess und der Betrag $|Z_n| = -Z_n$.

zz: $E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma$.

Wir benutzen die Zerlegung:

$$\begin{aligned}
E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) &= E(Y_\tau|\mathcal{F}_\sigma) + E(Z_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \\
((Y_n)_{n\geq 0} \text{ Martingal + Aussage in Punkt 1.)} &= Y_\sigma + E(Z_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \\
&= Y_\sigma + Z_\sigma + E(Z_\tau - Z_\sigma|\mathcal{F}_\sigma) \\
((Z_n)_{n\geq 0} \text{ monoton fallend } \ Z_\tau - A_\sigma \leq 0) &\leq Y_\sigma + Z_\sigma = X_\sigma.
\end{aligned}$$

zz: $E|X_\tau| < \infty$

Erst mal, $(Z_n)_{n\geq 0}$ is monoton fallend, so wir definieren fast sicher der Limus

$$Z_\infty := \lim_{n\to\infty} Z_n = \inf_{n\geq 1} Z_n$$

welche erfüllt auch $Z_\infty \leq 0$. Dann

$$\begin{aligned}
E|Z_n| = E(-Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_{i-1} - E(X_i|\mathcal{F}_{i-1})) \\
&\leq E|X_n - X_0| \\
&\leq 2\sup_{m\geq 0} E|X_m| < \infty
\end{aligned}$$

da $(X_n)_{n\geq 0}$ ist g.i. weil für jeder $\epsilon > 0$ und a groß genug aber eindlich, es folgt

$$E|X_m| \leq a + \int_{\{|X_n|\geq a\}} |X_n| dP \leq a + \epsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{m\geq 0} E|X_m| \leq a < \infty$$

für jedes $m \geq 0$. So, mit monoton Konvergenz wir haben $E|Z_n| \to E|Z_\infty|$ für $n \to \infty$ und $E|Z_\infty| < \infty$ und ferner, mit Theorem 1 i) $\Leftrightarrow$ ii) ist die Familie $(Z_n)_{n\geq 0}$ g.i. Mann kann weiter zeigen (nicht so Direkt, 1. Bemerkung nach der Beweis gucken), dass $(Y_n)_{n\geq 0}$ auch g.i. ist! Dann, wegen das erste Teil, $(Y_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal und jetzt auch g.i. so $E|Y_\tau| < \infty$. Zum Ende, es folgt:

$$\begin{aligned}
E|X_\tau| &\leq E|Y_\tau| + E|Z_\tau| \\
&\leq E|Y_\tau| + E(-Z_\tau) \\
&\leq E|Y_\tau| + E(-Z_\infty) \\
&= E|Y_\tau| + E|Z_\infty| < \infty. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

1. Bemerkung: Mann kann zeigen, dass die Charakterisierung von g.i. in Theorem 2 äquivalent mit den folgende Aussage ist: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $\sup_{t\in T} \int_A |X_t| dP < \epsilon$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) < \delta$, es gilt außerdem $\sup_{t\in T} E|X_t| < \infty$. Mit dieser andere Charakterisierung von g.i. mann kann folgern, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Z_n)_{n\geq 0}$ g.i. sind so ist auch $(X_n - Z_n : n \geq 0)$ g.i.

2. Bemerkung: Nicht vergessen, dass $X(\omega)_{\tau(\omega)}$ eine Zufallsvariable ist nur wenn $\tau < \infty$ P-f.s. So, wenn die Stoppzeit $\tau = \infty$ f.s. dann X_τ definiert keine Zufallsvariable.

Es gibt aber eine Interpretation von $(X_n)_{n\geq 0}$ als erweitert Martingal. Was ist das? Erstes mann zeigt, dass

$$(X_n)_{n\geq 0} \text{ g.i. Familie} \Rightarrow \sup_{n\geq 0} EX_n^+ < \infty$$

und weiter mit den Martingal-Konvergenzsatz, mann bekommt dass es X_∞ eine Zufallsvariable gibt, X_∞ ist $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$-messbar mit $E|X_\infty| < \infty$, und $X_n \to X_\infty$ P-f.s. Dann, mit Theorem 1 mann kann noch weiter zeigen (ohne Optional Stopping Theorem), dass $X_n \to X_\infty$ in $\mathcal{L}^1$ und auch

$$E(X_\infty|\mathcal{F}_n) = X_n$$

falls $(X_n)_{n\geq 0}$ ein g.i. Martingal ist (bzw. $E(X_\infty|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ falls $(X_n)_{n\geq 0}$ g.i. Supermartingal oder $E(X_\infty|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ falls $(X_n)_{n\geq 0}$ g.i. Submartingal). Dieser Resultät lass sich so intepretieren: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}}$ ist ein g.i. (Sub / Super) Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}}$.