Blatt 9

Abgabe Mo. 01.07.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136 / 137

Aufgabe 1 (3 + 4 Punkte)

a) Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsgrößen mit $E|X_0| < \infty$. Zeigen Sie, ohne den Ergodensatz zu verwenden, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \to EX_0 \quad \text{für } n \to \infty \text{ in } \mathcal{L}^1.$$

Hinweis: Schauen Sie sich noch mal den Beweis des Birkhoff'schen Ergodensatzes an.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Warscheinlichkeitsraum, $\varphi : \Omega \to \Omega$ eine maßtreue Abbildung und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion bzgl. $\mathcal{F}$. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{I} := \{A \subset \mathcal{F} : \varphi^{-1}A = A\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ eine σ-Algebra ist. Außerdem zeigen Sie, dass X meßbar ist bzgl. $\mathcal{I}$ genau dann, wenn P-f.s. $X \circ \varphi = X$ gilt.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

a) Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine stationäre Sequenz von Zufallsgrößen mit $E|X_n| < \infty$. Zeigen Sie, dass $X_n/n \to 0$ fast sicher für $n \to \infty$.

b) Sei $(\xi_i)_{i\geq 1}$ eine i.i.d. Sequenz von gleich verteileten Zufallsgrößen auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin(2\pi(\xi_{i+1} - \xi_i))$$

fast sicher existiert, und rechnen Sie diesen aus.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Warscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Für k_1, k_2 mit $-\infty \leq k_1 \leq k_2 \leq +\infty$ definieren wir $\mathcal{F}_{k_1}^{k_2}$ als die kleinstmögliche σ-Algebra die die Menge

$$C = \{\omega : X_{n_1}(\omega) \in A_1, \dots, X_{n_m} \in A_m\}$$

enthält, wobei $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, $k_1 \leq n_i \leq k_2$ für $i = 1, \dots, m$ und $A_i, \dots, A_m \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass die σ-Algebra $\cap_k \mathcal{F}_{-\infty}^{k}$ nur Mengen mit Maß null oder eins enthält.
Hinweis: Bemerken Sie, dass $\mathcal{F}_{k_1}^{k_2} \subset \mathcal{F}$. Dann definieren Sie die Menge

$$\mathcal{G} := \left\{ C \in \mathcal{F} \,\middle|\, \exists\, C_m \in \mathcal{F}_{-m}^{m} : \lim_{m\to\infty} P(C \Delta C_m) = 0 \right\}$$

und zeigen, dass $\mathcal{G}$ ein Dynkin-System ist. Jetzt bleibt zu zeigen, dass $P(A)$ null oder eins ist für alle $A \in \cap_k \mathcal{F}_{-\infty}^{k}$.