Blatt 7

Abgabe Mo. 17.06.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136 / 137

Sie dürfen das folgende Lemma verwenden, ohne es zu beweisen:

Lemma 1. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration und $(B_n)_{n\geq 0}$ eine Folge $\mathcal{F}_n$ - adaptierter Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei ferner $p_n := P(B_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1})$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k} \Big/ \sum_{k=1}^{n} p_k \to 1 \quad P\text{-f.s. auf } \left\{ \sum_{k\geq 1} p_k = \infty \right\}.$$

Aufgabe 1 (4 + 2 Punkte)

a) Sei $X_0 = 0$. Ferner sei

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (2k)^{-1} \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (2k)^{-1} \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - k^{-1} \end{cases},$$

falls $X_{k-1} = 0$ ist. Ist $X_{k-1} \neq 0$, so ist

$$X_k = \begin{cases} k \cdot X_{k-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } k^{-1} \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - k^{-1} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_k)_{k\geq 0}$ ein Martingal ist bzgl. der kanonischen Filtration. Warum können Sie den Martingal-Konvergenzsatz auf $(X_k)_{k\geq 0}$ nicht anwenden?

b) Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsgrößen und $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_0, \cdots, X_n\})$. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, so dass $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte + *5 Bonus Punkte*)

Studieren Sie das Beispiel 6.27 in dem Skript ein (Martingal-Konvergenzsatz auf Polya-Urne angewandt)... Sind Sie fertig? Ok, so es geht weiter!
Wir betrachten eine Variation des Polya-Urnes Models, nämlich die *Friedman-Urne*: In einer Urne seien r rote und g grüne Kugeln. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ ziehen wir eine Kugel aus der Urne und legen sie zusammen mit $a \in \mathbb{N}_0$ Kugeln derselben Farbe zurück und $b \in \mathbb{N}$ Kugeln gegenüberliegenden Farbe zurück. Mit X_n bezeichnen wir den Anteil der grünen Kugeln nach dem n-ten Durchgang. Folgen Sie den nächsten Schritten um zu zeigen, dass $X_n \to 1/2$ für $n \to \infty$.

a) Nehmen Sie $a = b$ an und folgern die Aussage.

b) Nehmen Sie $a > b$ an. Sei D_n der Anzahl der gezogenen grüne Kugeln in den ersten n-Durchgängen. Schreiben Sie X_{n+1} als Funktion von D_n, a, b, g, r, n und benutzen Sie Lemma 1 um zu zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} X_{n+1} \leq \frac{b + (a-b)x}{a+b}$$

falls $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq x$. Folgern Sie dann die Aussage.

bitte wenden!

c) Nehmen Sie $a < b$ an. Was passiert mit X_{n+1} wenn $D_n \leq xn$ für $x \in (0,1)$? Mit Y_n bezeichnen Sie den Anteil der roten Kugeln nach dem n-ten Durchgang. Schreiben Sie Y_{n+1} als Funktion von D_n, a, b, g, r, n und zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} X_{n+1} \leq \frac{a+(b-a)y}{a+b} \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} Y_{n+1} \leq \frac{a+(b-a)x}{a+b}$$

falls $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq x$ und $\limsup_{n\to\infty} Y_n \leq y$. Folgern Sie dann die Aussage.

Bonus Beweisen Sie Lemma 1.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Seien $\mathcal{F}_n$ σ-Algebren mit $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}$, d.h. $\sigma(\{\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n\}) = \mathcal{F}$. Es seien $\mu_n := \mu|\mathcal{F}_n$, $\mu_n := \nu|\mathcal{F}_n$ und

$$X := \limsup_{n\to\infty} \frac{d\mu_n}{d\nu_n}.$$

Dann gilt

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow \mu(X < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_\nu(X) = 1$$
$$\mu \perp \nu \Leftrightarrow \mu(X = \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_\nu(X) = 0,$$

wobei die Definitionen von $\mu \ll \nu$ bzw. $\mu \perp \nu$ sind:

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow (A \in \mathcal{F}, \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0)$$

$$\mu \perp \nu \Leftrightarrow \exists\, N \in \mathcal{F} : \mu(\Omega \setminus N) + \nu(N) = 0.$$