Blatt 6

Abgabe Mo. 10.06.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136 / 137

Definition 1 (gleichgradig integriebar). *Für T abzählbar, eine Familie $(X_t)_{t\in T}$ von Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt* **gleichgradig integrierbar (g.i.)** *falls*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{t\in T} \int_{\{|X_t|>a\}} |X_t| d\,\mathbb{P} = 0.$$

Sie können Theorem 1 und Theorem 2 benutzen, ohne sie zu beweisen:

Theorem 1. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Familie von Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Für $p \in [1, \infty)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $X_n \to X$ *in Wahrscheinlichkeit und* $(|X_n|^p)_{n\geq 0}$ *g.i.*

ii) $X_n \to X$ *in Wahrscheinlichkeit,* $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ *für alle* $n \geq 0$ *und* $\mathbb{E}|X_n|^p \to \mathbb{E}|X|^p$ *mit* $\mathbb{E}|X|^p < \infty$.

iii) $X_n \to X$ *in* $\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$.

Theorem 2. *Die Familie $(X_t)_{t\in T}$ ist g.i. genau dann wenn es gibt eine messbare Funktion $\varphi \geq 0$ (φ kann stets monoton wachsend und konvex gewählt werden) mit $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$ und $\sup_{t\in T} \mathbb{E}\,\varphi(|X_t|) < \infty$.*

Aufgabe 1 (3 + 4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration. Sei Stopzeiten $\sigma, \tau, \tau_1, \tau_2 \dots$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen gelten:

a) $\tau \wedge \sigma := \min\{\tau, \sigma\}$, $\tau \vee \sigma := \max\{\tau, \sigma\}$ und $\sigma + \tau$ sind Stopzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

b) $\inf_{n\geq 1} \tau_n$, $\sup_{n\geq 1} \tau_n$, $\liminf_{n\to\infty} \tau_n$ und $\limsup_{n\to\infty} \tau_n$ (falls existent) sind Stopzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie die folgende Aussagen:

a) Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine g.i. Familie. Dann ist die Familie ($X_\tau :\ \tau$ ist endliche Stoppzeit) g.i.
Hinweis: Optional Sampling, Theorem 2 und Jensen'sche Ungleichung.

b) Sei T eine endliche Stopzeit bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $(X_{T\wedge n})$ ein g.i. Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist wenn $\mathbb{E}X_T < \infty$ und $\mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{\{T>n\}}) \to 0$ als $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte für Martingal + 4 Punkte für Supermartingal)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration. Zeigen Sie die folgende Aussage: Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein g.i. Martingal (bzw. Supermartingal) bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, und sind $\sigma \leq \tau$ Stoppenzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, dann gilt $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ und $X_\sigma = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$ (bzw. $X_\sigma \geq \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$).

Hinweis: Für den Martingal-Fall, Aufgabe 2a) und Optional Sampling können helfen. Für den Supermartingal-Fall, die Doob-Zerlegung kann helfen