Blatt 5

Abgabe Mo. 03.06.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136 / 137

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

a) Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}\,\xi_1 < \infty$ und $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Sei

$$M_m := \frac{S_{n-m}}{n-m} \qquad \text{für } 0 \leq m < n.$$

Wählen Sie die kanonische Filtration $\mathcal{F}_k := \sigma(\{M_1, \ldots, M_k\})$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{M_m : 0 \leq m < n\}$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_m)$ ist.

b) Sei (X_n) ein vorhersagbares Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$, wobei $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_1, \ldots, X_n\})$. Zeigen Sie, dass $X_n = X_0$ für jedes n fast sicher gilt.

Aufgabe 2 (Wald's equation) (4 Punkte)

Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsgrößen mit $\mu := \mathbb{E}\,\xi_1 < \infty$ und $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Sei T eine Stoppzeit bzgl. die kanonische Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\{S_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\})$ sodass $\mathbb{E}\,T < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(S_T - S_0) = \mu\,\mathbb{E}\,T.$$

Hinweis: Wählen Sie $T_n := \min\{T, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist S_{T_n} ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$? Dann, wenden Sie *Optional Sampling Theorem* an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei S_n die Gesamtsaktiva einer Versicherung am Endes des n-ter Jahr. Diese mögen sich gemäß der Identität

$$S_n = S_{n-1} + c - \zeta_n$$

entwickeln, wobei c die Anzahl der Prämien und ζ_n die Anzahl die Ansprüche im n-ten Jahr bechreibt. Nehmen Sie an, dass $\eta_n := c - \zeta_n$ ein $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteiltet Zufallgröße ist, für $\mu > 0$, $(\eta_n)_n$ i.i.d. sind und S_0 deterministisch ist. Sei B das Ereignis, dass der Besitz der Versicherung im n-ten Jahr negativ ist, d.h. die Versicherung bankrott ist. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\frac{2\mu S_0}{\sigma^2}\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\exp(-2\mu S_n/\sigma^2)$ ein Martingal ist. Dann, suchen Sie eine Stoppzeit T in Verbindung mit der Ereignis B und für $T_n := \min\{T, n\}$ wenden Sie *Optional Sampling Theorem* an.