Blatt 3

Abgabe Mo. 13.05.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136 / 137

Definition 1 (aperiodisch). *Eine Markov-Kette auf S mit Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$ heißt* **aperiodisch**, *wenn für alle $i \in S$ gilt, dass $ggT(\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}) = 1$.*

Definition 2 (reversibel). *Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf S mit Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$. Eine Verteilung π auf S heißt* **reversibel** *bezüglich X, wenn für alle $i, j, \in S$ gilt $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$. Die Markov-Kette X heißt reversible, wenn es eine reversibel Verteilung bezüglich X gibt.*

Definition 3 (transient und absorbierend). *Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf S. Ein Zustand $s \in S$ heißt* **absorbierend**, *falls $p_{ss} = 1$. Für jedes $i \in S$ sei*

$$\tau_i := \inf\{n > 0 : X_n = i\}$$

die erste Eintrittzeit von X in i. Ein Zustand $j \in S$ heißt **transient**, *falls*

$$P(\tau_j < \infty \,|\, X_0 = j) < 1.$$

Aufabe 1 (4+3 Punkte)

a) Sei S ein endlicher Raum. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf S. Nehmen Sie an, dass ein absorbierend Zustand $s \in S$ mit $i \rightsquigarrow s, \forall\, i \in S$ existiert. Zeigen Sie, dass alle $i \in S \setminus \{s\}$ transient sind.

b) Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf S. Sei π reversibel bezüglich X. Zeigen Sie, dass π auch stationär ist.

Aufabe 2 (5 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass eine Markov-Kette auf einem endlichen Raum S mit Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$ genau dann irreduzibel und aperiodisch ist, wenn es ein N gibt, so dass für alle $i, j \in S$ gilt $p_{ij}^{(N)} > 0$.

Hinweis: Sie dürfen folgendes Lemma ohne Beweis benutzen:
Sei $A \subset \mathbb{N}$ so, dass $ggT(A) = 1$ und A abgeschlossen ist unter Addition, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt $n \in A$.
Falls Sie den Lemma beweisen, kriegen Sie 3 Bonuspunkte!

Aufabe 3 (5 Punkte)

Se $a \in \mathbb{N}$ und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf $S := \{0, 1, \ldots, a\}$ mit Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j\in S}$, so dass $p_{a,a} = p_{0,0} = 1$ und $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ für alle $i \in \{1, \ldots, a-1\}$, wobei $p, q \in (0, 1) : p + q = 1$. Für jeder $i \in \{1, \ldots, a-1\}$ sei

$$T_i := \inf\{n > 0 : X_0 = i, X_n = a \text{ oder } X_n = 0\}.$$

Zeigen Sie, für $p = q$, dass $E\,T_i = i(a - i)$.

Hinweis: Setzen Sie die Randwerte $E\,T_0 = 0, E\,T_a = 0$ und suchen nach eine Differenzengleichung für $E\,T_i$. Dieser Gleichung lässt sich mit Funktionen auf die Form $-i^2$ lösen, die die Randwertbedingungen auch erfüllen.