Blatt 2 - Prinzip der großen Abweichungen

Abgabe Mo. 06.05.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136

Aufabe 1 (6 Punkte)

Sei Y_n ein $Multinomial(n; p_1, \dots, p_k)$-verteiltet Zuffalsgroße, wobei $p_1 + \cdots + p_k = 1$, $p_i \in (0,1)$ jeder $i = 1, \dots, k$. Genügt die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem Prinzip der großen Abweichungen? Wenn ja, mit welchem Geschwindichkeit und Ratenfunktion?

Definition 1 (Ratenfunktion)**.** *Die Funktion $I : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ heißt Ratenfunktion wenn*

i) $I \neq \infty$.

ii) *I hat kompakte Niveaumengen* $N_L := \{x \in \mathbb{R} : I(x) \leq K\}$, *für jeder* $K \geq 0$.

Definition 2 (LDP)**.** *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ genügt einem Prinzip der großen Abweichungen (LDP) mit Geschwindichkeit n und Ratenfunktion I wenn*

iv) I ist eine Rafenfunktion im Sinne der Definition 1.

v) Die obere Schranke gilt: für jedes abgeschlossene Intervall $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(\mathcal{A}) \leq - \inf_{x\in\mathcal{A}} I(x).$$

vi) Die untere Schranke gilt: für jedes offene Intervall $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(\mathcal{O}) \geq - \inf_{x\in\mathcal{O}} I(x).$$

Aufabe 2 [Varadhan's Lemma] (8 Punkte)

Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$ die einem LDP mit Geschwindichkeit n und Ratenfunktion I genügt. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die von oben beschränkt ist. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} e^{nF(x)} P_n(dx) = \sup_{x\in\mathbb{R}} [F(x) - I(x)]. \tag{1}$$

Um die Formel (1) zu zeigen, folgen Sie den nächsten Schritten:

1. Seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von positiven reellen Zahlen. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\log(\alpha_n + \beta_n) - \log(\max\{\alpha_n, \beta_n\})] = 0. \tag{2}$$

(dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Dann setzen Sie

$$J_n(B) := \int_B e^{nF(x)} P_n(dx) \qquad \text{für jede Borelmenge } B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

und

$$a := \sup_{x\in\mathbb{R}} F(x), \qquad b := \sup_{x\in\mathbb{R}} [F(x) - I(x)].$$

Zeigen Sie, dass $-\infty < b \leq a < \infty$ gilt.

2. Sie möchten jetzt zeigen, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(\mathbb{R}) \leq b$ gilt.

   (a) Sei $N \in \mathbb{N}$. Setzen Sie $C := F^{-1}([b,a])$ und die Zerlegung $C_j^N := F^{-1}([c_{j-1}^N, c_j^N])$ für jedes $j = 1, \ldots, N$ wobei $c_j^N = b + \frac{j}{N}(a-b)$. Sehen Sie die Verbindung zwischen C und $(C_j^N)_{j=1,\ldots,N}$? Mit dieser Verbindung, Bemerkung (2) und dem LDP für $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(C) \leq \max_{1\leq j\leq N} [c_j^N - \inf_{x\in C_j^N} I(x)].$$

   (b) Aus dieser Ungleichung folgern Sie

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(C) \leq \sup_{x\in C}[F(x) - I(x)] + \frac{1}{N}(a-b) \leq b + \frac{1}{N}(a-b).$$

   (c) Zeigen Sie, dass $J_n(\mathbb{R} \setminus C) \leq e^{nb}$ gilt und folgen Sie die Behauptung in 2.

3. Sie möchten jetzt zeigen, dass $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(\mathbb{R}) \geq b$ gilt.

   (a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Setzen Sie $O_{x,\varepsilon} := \{y \in \mathbb{R} : F(y) > F(x) - \varepsilon\}$.

   (b) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt einem LDP, so zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(O_{x,\varepsilon}) \geq F(x) - \varepsilon - I(x).$$

   (c) Mit $J_n(\mathbb{R}) \geq J_n(O_{x,\varepsilon})$ und den letzten Ungleichungen folgern Sie die Behauptung in 3.

4. Sie haben es geschafft! Mit 2. und 3. zusammen haben Sie (1) gezeigt!

Aufabe 3 [Contraction Principle] (6 Punkte)

Zeigen Sie das folgende Resultat: Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$, die einem LDP mit Geschwindichkeit n und Ratenfunktion I genügt. Sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $Q_n := P_n \circ T^{-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Dann genügt $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem LDP mit Geschwindichkeit n und Ratenfunktion J gegeben durch

$$J(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}:T(x)=y} I(x)$$

wobei $\inf_\emptyset I = \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie direkt, dass Punkte *v)* und *vi)* in Definition 2. gelten. Zum Abschluss, zeigen Sie, dass J im Sinn der Definition 1 eine Ratenfunktion ist.