Blatt 10

Abgabe Mo. 08.07.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136 / 137

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, d.h. $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra aus Teilmengen von Ω. Sei $\varphi : \Omega \to \Omega$ eine messbare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M} := \{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega) : \mu \circ \varphi^{-1} = \mu\}$ der unter φ invarianten Maße eine konvexe Menge ist.

b) Ein Element μ aus $\mathcal{M}$ heißt extremal, wenn aus $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ für gewisse $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in (0,1)$ schon $\mu = \mu_1 = \mu_2$ folgt. Zeigen Sie, dass $\mu \in \mathcal{M}$ genau dann extremal ist, wenn φ bezüglich μ ergodisch ist (d.h. wenn φ maßtreu und $\mathcal{I}$ μ-trivial sind).

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Abbildung φ schwach mischend ist, so ist φ auch ergodisch.

Aufgabe 3 (4 + 4 Punkte)

Sei (S, d) ein separabler, metrischer Raum, $\mathcal{B}_S$ die Borel'sche σ-Algebra über S und $\mathcal{P}$ die Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S, \mathcal{B}_S)$. Die *Prohorov distance* $\rho : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ ist gegeben durch

$$\rho(P, Q) := \inf\{\varepsilon > 0 : \forall\, A \in \mathcal{B}_S,\ P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon \ \text{ und } \ Q(A) \leq P(A^\varepsilon) + \varepsilon\}$$

wobei $A^\varepsilon := \{x \in S : d(x, A) < \varepsilon\}$ und $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

a) Zeigen Sie, dass ρ eine Metrik ist.

   Hinweis: Sie wissen, dass $\forall\, M \in \mathcal{B}_S$ und jeder $\varepsilon > 0$, es $A \in \mathcal{B}_S$ abgeschlossene Menge und $O \in \mathcal{B}_S$ offene Menge gibt, so dass $A \subset M \subset O$ und $P(O \setminus A) < \varepsilon$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\rho(P, Q) \leq \varepsilon$ gilt, wenn $\forall\, A \in \mathcal{B}_S : P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon$ gilt.