Blatt 1

Abgabe Mo. 29.04.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136

Aufabe 1 (2+2 Punkte)

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}e^{tX_1} < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei

$$I(a) := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq an) \quad \text{wobei } S_n := \textstyle\sum_{i=1}^n X_i.$$

a) Zeigen Sie, dass $I(a) = \infty \Leftrightarrow \mathbb{P}(X_1 \geq a) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(S_n \geq an) = 0$ für alle n.

b) Zeigen Sie, dass $I(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda(a) + (1-\lambda)I(b)$ für alle $\lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und danach für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. I also ist konvex. Zeigen Sie auch, dass I Lipschitz stetig auf kompakten Teilmengen von $\{I(a) < \infty\}$ ist.

Aufabe 2 (3+2 Punkte)

a) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Bernoulli-Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$. Benutzen Sie den Satz von Cramer, um zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \in (a,b)\right) = -\inf_{x\in(a,b)} H(x|p),$$

wobei $H(x|p) = x\log(x/p) + (1-x)\log((1-x)/(1-p))$. Benutzen Sie dieser Resultät um die Ratenfunktion I zu rechnen, wenn $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Spins ist, d.h. $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2 = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1)$.

b) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Exponential-Zufallsvariablen mit $X_1 \sim Exp(\theta)$. Benutzen Sie den Satz von Cramer, um zu zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \in (a,b)\right) = -\inf_{x\in(a,b)} \mathcal{H}(x),$$

wobei $\mathcal{H}(x) = \theta x - 1 - \log(\theta x)$ für $x > 0$ und $= \infty$ sonst.

Aufabe 3 (3+3 Punkte)

a) Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Bernoulli-Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$. Beweisen Sie, dass für jedes $1/2 < \alpha < 1$ die Folge

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mathbb{E}X_i}{n^\alpha \sqrt{p(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

einem Prinzip der großen Abweichungen mit Geschwindigkeit $n^{2\alpha-1}$ und Ratenfuktion $I(x) = x^2/2$ genügt.

b) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable und $\varphi(t) := \mathbb{E}e^{tX}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\exists\,\delta > 0 : \varphi(t) < \infty$, für alle $t \in (-\delta, \delta)$.

ii) $\exists\,\lambda > 0, \theta > 0 : \mathbb{P}(|X| \geq x) \leq \lambda e^{-\theta x}$, für alle $x > 0$.

Vergleichen Sie i) und ii) mit den Bedeutung von die Bedinung (1) im Theorem 1.6 aus der Vorlesung.