Blatt 0

Abgabe Mo. 22.04.2013 bis spätestens 14 Uhr im Fach 136

Aufabe 1 (5 Punkte)

a) Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der λ^2-Dichte f gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

für $(\sigma, \rho) \in (0, \infty) \times (-1, 1)$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die regulär bedingte Verteilung $P^{X|Y=y}$ für P^Y-fast alle $y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ferner $E(X|Y = y)$.

b) Seien X, Y normalverteilt mit Parametern μ, σ^2 bzw. ν, τ^2. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von $(X, X+Y)$ und anschließend die Dichte der bedingten Verteilung von X gegeben $X+Y = s$ für $x, s \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ferner $E(X|X+Y = s)$.

Aufabe 2 (5 Punkte)

Es sei $(X, Y) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'')$ ein Zufallsvektor und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Borel-Raum. Weiter sei $h : (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'') \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ eine quasi-integrierbare Funktion und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, bzgl. derer Y messbar ist.

a) Zeigen Sie, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$E(h(X,Y)|\mathcal{F})(\omega) = \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx).$$

b) Zeigen Sie, dass für jedes $g : (\Omega', \mathfrak{A}') \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, für das $g(X)$ quasi-integrierbar ist, gilt

$$E(g(X)|Y = y) = \int g(x) P^{X|Y=y}(dx) \qquad P^Y\text{-fast sicher.}$$

Aufabe 3 (5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ und $X, Y, X_1, X_2, \ldots$ nicht-negative bzw. integriebare Zufallgrößen.

a) Zeigen Sie, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungswerte gilt

$$X_n \to X \quad P\text{-f.s. und } \sup_{n \geq 1} |X_n| \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{A}) \quad \Rightarrow \quad E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F}) \quad P\text{-f.s.}$$

b) Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Zeigen Sie, dass die bedingte Hölder Ungleichung gilt

$$E(XY|\mathcal{F}) \leq E(X^p|\mathcal{F})^{1/p} \, E(Y^q|\mathcal{F})^{1/q}$$

Hinweis: Benutzen Sie regulär bedingte Verteilungen und die unbedingte Hölder-Ungleichung.