Übungen

Abgabetermin: Dienstag 25.6. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: der bedingte Erwartungswert

Aufgabe 40 (2+2+2 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $\mathscr{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ und $X, Y, X_1, X_2, ...$ nichtnegative ZG. Zeigen Sie:

(a) Aus $X_n \uparrow X$ f.s. folgt $\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathscr{F})$ f.s.

(b) $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}) \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathscr{F})$ f.s.

(c) Aus $X_n \to X$ f.s. und $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \in \mathfrak{L}^1(\mathfrak{A})$ folgt $\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathscr{F})$ f.s.

Aufgabe 41 (2+2 Punkte)

(a) Es sei X eine integrierbare, $\mathscr{F}$-messbare ZG und $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Zeigen Sie ohne Benutzung von Satz 8.9, dass aus der Unabhängigkeit von X und $\mathscr{G}$ bereits $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(X)$ folgt.

(b) Es seien X_1 und X_2 zwei $Binom(1,p)$-verteilte ZG, $p \in (0,1)$. Wir definieren $p_{ij} := \mathbb{P}(X_2 = j|X_1 = i)$ für alle $i, j \in \{0,1\}$. Bestimmen Sie eine Version von $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.

Aufgabe 42 (2+2+2 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unanbhängiger, identisch verteilter und integrierbarer ZG und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes, dass $\int_A X_1 \, d\mathbb{P} = \int_A X_k \, d\mathbb{P}$ für alle $A \in \sigma(S_n)$ und alle $1 \leq k \leq n$ gilt.

(b) Zeigen Sie $\mathbb{E}(X_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$ f.s.

(c) Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ erhält ein Beobachter den Wert von S_n, ein zweiter die Werte von $S_n, S_{n+1}, \ldots$ Welcher Beobachter erhält mit der Theorie der bedingten Erwartungswerte den besseren Approximanden für X_1?

Bitte wenden!

Aufgabe 43 (4 Punkte)
Für $0 < p < 1$ und $0 < a < 1 < b < \infty$ sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter ZG mit $\mathbb{P}(X_1 = a) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = b)$ sowie $Y_k := \prod_{i=1}^k X_i$ für $1 \leq k \leq n$. Bestimmen Sie einen Wert von p, so dass für alle $0 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}|X_1, ..., X_k) = Y_k \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Liegt für dieses p fast sichere Konvergenz von Y_n vor?
Hinweis: Betrachten Sie $\log Y_n$.

Zusatzaufgabe (3* Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}})$ und $Y(\omega) := \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \omega_i$ für $\omega \in \Omega$. Es sei $\mathscr{F}$ die von Y erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}) = \mathbb{E}X$ $\mathbb{P}$-f.s. für jede ZG X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ gilt.