Übungen

Abgabetermin: Dienstag 18.6. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: Gesetz vom iterierten Logarithmus, Glivenko-Cantelli und bed. Erwartung

Aufgabe 36 (2+3 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, zentrierter ZG mit endlichen Varianzen und Partialsummenfolge $(S_n)_{n\geq 1}$.

(a) Folgern Sie aus dem Gesetz vom iterierten Logarithmus das starke Gesetz der großen Zahlen von Kolmogorov.

(b) Untersuchen Sie $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\log(\log(n))}}\right)_{n\geq 1}$ und $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ jeweils auf fast sichere, stochastische, Verteilungskonvergenz und auf Konvergenz in L^2.

Aufgabe 37 (2+3 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, zentrierter ZG mit positiver, endlicher Varianz σ^2 und Partialsummenfolge $(S_n)_{n\geq 1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n\log(\log(n))}} - \frac{S_{n+1}}{\sqrt{2\sigma^2(n+1)\log(\log(n+1))}}$ fast sicher gegen 0 konvergiert.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gesetzes vom iterierten Logarithmus und Teil (a), dass die Häufungspunkte von $\left(\frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n\log(\log(n))}}\right)_{n\geq 1}$ fast sicher durch $[-1,1]$ gegeben sind.

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch und symmetrisch bezüglich 0 verteilter ZG auf einem W-Raum $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$. Weiterhin sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen empirischen Verteilungsfunktionen, und es bezeichne $F_n(\omega,t-) = \lim_{s\uparrow t} F_n(\omega,s)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(\omega,t) + F_n(\omega,(-t)-) - 1| = 0 \quad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega\in\Omega.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 39 (4+2 Punkte)
In einem großen Unternehmen wurden für die Auszubildenden die in einem Einstellungstest erzielte Note X und die Abschlussnote Y untersucht. Für die beiden Noten ergab sich folgende gemeinsame Verteilung (die Tabelle enthält die Werte $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ für $1 \leq x, y \leq 4$)

x \ y	1	2	3	4
1	0.15	0.09	0.05	0.01
2	0.12	0.15	0.10	0.03
3	0.03	0.05	0.09	0.08
4	0.00	0.01	0.01	0.03

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y sowie deren Kovarianz.

(b) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(Y = y|X = 3)$ für $1 \leq y \leq 4$ und damit den zugehörigen bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(Y|X = 3)$.