Übungen

Abgabetermin: Dienstag 11.6. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134
THEMEN: Etemadi-Ungleichung, 3-Reihensatz, Gesetze der großen Zahlen

Aufgabe 32 (2+2 Punkte)

(a) Es seien X und Y zwei unabhängige ZG mit $\mathbb{E}Y = 0$ und φ eine nicht-negative, monoton wachsende, konvexe Funktion auf $[0, \infty)$. Zeigen Sie $\mathbb{E}\varphi(|X|) \leq \mathbb{E}\varphi(|X+Y|)$.
Hinweis: Fubini und Jensen

(b) Gegeben seien unabhängige, zentrierte ZG $X_1,...,X_n$ mit Partialsummen $(S_k)_{1\leq k\leq n}$, $p > 1$ und $\varepsilon > 0$. Benutzen Sie Aufgabenteil (a) und die Etemadi-Ungleichung aus der Vorlesung, um die folgende Ungleichung zu zeigen:

Kolmogorov-Ungleichung: $\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{3^{p+1}}{\varepsilon^p}\mathbb{E}|S_n|^p.$

Aufgabe 33 (4+3 Punkte)

(a) Beweisen Sie Korollar 7.21. aus dem Vorlesungsskript: Gegeben eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 1}$ und eine unabhängige Folge $(\nu_n)_{n\geq 1}$ auf $\{-1, +1\}$ gleichverteilter ZG gilt: Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \nu_n a_n$ ist genau dann f.s. konvergent, wenn $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty$.

(b) Gegeben eine unabhängige Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$ mit $\mathbb{E}Z_n = 0$ für alle $n \geq 1$ gilt: Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{Z_n}{n}$ ist f.s. konvergent, wenn $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}|Z_n|^p}{n^p} < \infty$ für ein $1 \leq p \leq 2$.

Aufgabe 34 (3+2 Punkte)
Es sei X eine standardnormalverteilte Zufallsgröße.

(a) Bestimmen Sie die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von $Y := e^{\sigma X+\mu}$ für $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$ sowie $\mathbb{E}Y$ und zeigen Sie $\mathbb{V}arY = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

(b) Es seien nun $\sigma_n = \sqrt{\log(n)}$ für $n \geq 1$ sowie $Y_n := e^{\sigma_n X}, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbb{E}Y_k) = 0$ fast sicher gilt.

Aufgabe 35 (4 Punkte)
Zeigen Sie folgende Aussage im Beweis des Satzes von Marcinkiewicz-Zygmund (Satz 7.25 im Skript):
Es sei $p \in (1, 2)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter ZG mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$. Dann gilt mit der Bezeichnung $Y_n := X_n \cdot 1_{\{|X_n|\leq n^{1/p}\}}$:

$$n^{-1/p} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$