Übungen

Abgabetermin: Dienstag 4.6. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: 0-1-Gesetze und Random-Walk

Aufgabe 28 (2+2 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) < \infty$ gilt $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq 1 - \mathbb{P}(A)$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) = \infty$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Aufgabe 29 (2+3 Punkte)

(a) Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), Q)$, wobei Q ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ sei. Weiter sei $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ der Shift-Operator und schließlich $\mathcal{I} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \mid S^{-1}(A) = A\}$ das System der shift-invarianten Mengen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{I}$ gilt.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger ZG. Zeigen Sie, dass eine Zahl $r \in [0, \infty]$ existiert, so dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n z^n$ für $|z| < r$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert und für $|z| > r$ $\mathbb{P}$-f.s. divergiert.

Aufgabe 30 (2+4 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass die Menge $\mathscr{S}$ der symmetrischen Teilmengen von $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ eine σ-Algebra bildet.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter ZG und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des 0-1-Gesetzes von Hewitt und Savage, dass

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\right) \in \{0, 1\}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 31 (1+2+2 Punkte)
Gegeben eine unabhängige Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ identisch verteilter ZG mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) \in (0,1)$ und Partialsummenfolge $(S_n)_{n\geq 1}$.

(a) Simulieren Sie für $p = \frac{1}{2}$ und für ein $p \neq \frac{1}{2}$ (per Hand oder per Computer) jeweils mindestens 3 mögliche Pfade der Länge 10 und stellen Sie diese in geeigneter Weise jeweils in einer Graphik dar.

(b) Geben Sie die Verteilung von S_n in Abhängigkeit von n und p an.

(c) Leiten Sie für den Spezialfall $p = \frac{1}{2}$ den Erwartungswert und die Varianz von S_n her.

Hinweis: Die Simulation kann beispielsweise mit R durchgeführt werden. Hilfreiche Befehle wären: `sample(c(-1,1),10,replace=TRUE,prob=c(0.5,0.5))`, `cumsum(...)`, `plot(...)`. Für weitere Tipps und eine ausführliche Einführung siehe auch
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1213/PrakStat/`