Übungen

Abgabetermin: Dienstag 28.5. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: Produkträume, Faltungen und die terminale σ-Algebra

Aufgabe 24 (5 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{Exp}(1))$, $\alpha > 0$ und

$$A_\alpha := \{\omega \in \Omega \mid \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } n \geq k \text{ mit } \omega_n \geq \alpha \log n\}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\alpha \in \mathfrak{A}$ gilt, und bestimmen Sie $\mathbb{P}(A_\alpha)$.

Aufgabe 25 (8 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\lambda\!\!\lambda$-Dichten $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $N : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsgröße.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Exp}(\lambda)^{*(n)} = \Gamma(n, \lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ gilt, wobei die Γ-Verteilung $\Gamma(n, \lambda)$ folgende $\lambda\!\!\lambda$-Dichte besitzt:

$$g_{n,\lambda}(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

(b) Zeigen Sie, dass $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$ eine Zufallsgröße ist, und weisen Sie nach, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \cdot (f_1 * \ldots * f_n)$$

eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von S_N ist.

(c) Es seien $\lambda > 0, p \in (0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Verteilung von S_N, falls $\mathbb{P}^{X_n} = \mathrm{Exp}(\lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und N eine Zähldichte der Form

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \geq k,$$

besitzt.

Aufgabe 26 (3 Punkte)
Es sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, der 2-dimensional normalverteilt sei mit den Parametern $\mu = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))^T$ und $\Sigma = (Cov(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq 2}$, d.h. mit der gemeinsamen $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x_1, x_2) - \mu^T)\Sigma^{-1}((x_1, x_2)^T - \mu)\right).$$

Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsgrößen und sei $\mathscr{T}_\infty = \bigcap_{n\geq 1}\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ die zugehörige terminale σ-Algebra. Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\{\sum_{i=1}^n X_i$ konvergiert$\}$ und $\{\lim_{n\to\infty} X_n = a\}$ sind terminale Ereignisse.

(b) Das Ereignis $\{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n X_i = a\}$ ist im Allgemeinen nicht terminal.

Zusatzaufgabe I (3* Punkte)
Es sei $(\mathfrak{A}_n)_{n\geq 0}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren.

(a) Finden Sie ein Beispiel, bei dem $\bigcup_{n\geq 0}\mathfrak{A}_n$ keine σ-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie: Ist die Folge echt aufsteigend, so ist $\bigcup_{n\geq 0}\mathfrak{A}_n$ nie eine σ-Algebra.

Zusatzaufgabe II (3* Punkte)
Die Zufallsgröße X besitze eine Cauchy-Verteilung mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$, d.h. die $\lambda\!\!\!\lambda$-Dichte

$$f^X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + (x-a)^2}.$$

(a) Die Zufallsgröße Y sei definiert durch $Y = cX + d$, wobei $c, d \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine $\lambda\!\!\!\lambda$-Dichte und die Verteilung von Y.

(b) Untersuchen Sie, ob $\mathbb{E}(X)$ existiert, und bestimmen Sie ggf. diesen Wert.

Zusatzaufgabe III (3* Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \in [-1,1]^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die iterierten Integrale existieren und stimmen überein.

(b) Das Integral $\int f \, d\lambda\!\!\!\lambda \otimes \lambda\!\!\!\lambda$ existiert nicht.

Hinweis: Die Funktion $F_y(x) = \frac{-y}{2(x^2+y^2)}$ ist auf $(0,1)$ differenzierbar mit $\frac{dF_y(x)}{dx} = f(x,y)$.