Übungen

Abgabetermin: Dienstag 14.5. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: Faltungen und unendliche Produkträume

Aufgabe 20 (5 Punkte)
Es sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Bestimmen Sie die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von $\mathbb{P}^{*(n)}$ für $2 \leq n \leq 4$ und zeichnen Sie diese. Hierbei bezeichne $\mathbb{P}^{*(n)}$ die n-fache Faltung von $\mathbb{P}$ mit sich selbst. Stellen Sie eine Vermutung für die Dichte von $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{*(n)}$ auf.

Aufgabe 21 (6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\times_{t\in T} \mathbb{R}, \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit $T = \mathbb{R}_{\geq} := [0, \infty)$. Prüfen Sie, ob folgende Mengen Elemente von $\mathfrak{A}$ sind:

(a) $A = \{\omega \in \Omega \mid (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist beschränkt in } \mathbb{R}\}$

(b) $B = \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \omega_t \text{ ist beschränkt in } \mathbb{R}\}$

(c) $C = \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \omega_t \text{ ist isoton}\}$

(d) $D = \{\omega \in \Omega \mid \omega_n \in [\omega_{n+1} - 1, \omega_{n+1} + 1] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$

Aufgabe 22 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = \left(\times_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_{\geq}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq}), \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} Exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ und $X : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$,

$$X(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_n \leq n\}, \quad \inf \emptyset := \infty.$$

(a) Zeigen Sie: X ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{P}(\overline{\mathbb{N}})$-messbar.

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{P}^X$ ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\overline{\mathbb{N}}$ mit Zähldichte

$$q(n) = e^{1-n}(1 - e^{-1})\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n).$$

Aufgabe 23 (4 Punkte)
$(\Omega_t, \mathfrak{A}_t)_{t\in T}$ sei eine Familie messbarer Räume und $f : \times_{t\in T} \Omega_t \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann $\bigotimes_{t\in T} \mathfrak{A}_t$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, wenn es eine abzählbare Teilmenge $I \subset T$ und eine $\bigotimes_{t\in I} \mathfrak{A}_t$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung $g : \times_{t\in I} \Omega_t \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = g \circ p_I$ (d. h. f hängt nur von abzählbar vielen Komponenten ab).