Übungen

Abgabetermin: Dienstag 7.5. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz, Produkträume und der Satz von Fubini

Aufgabe 16 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von p-fach integrierbaren ZG, $p \in [1,\infty)$, die in Wahrscheinlichkeit gegen eine ZG X konvergiere, und $\mathbb{E}|X_n|^p \to \mathbb{E}|X|^p < \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass X_n dann auch schon in $\mathfrak{L}^p$ gegen X konvergiert.

Aufgabe 17 (5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion und $M := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq f(\omega)\}$. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann $\mathfrak{A}$-messbar, wenn $M \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(\omega, t) := f(\omega) - t$.

(b) Ist f $\mathfrak{A}$-messbar, so gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \mu \otimes \lambda\!\!\lambda(M)$. Versuchen Sie mit einem Bild eine Heuristik für diesen Sachverhalt zu geben.

Aufgabe 18 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie ein weiteres Mal die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y \leq X)$ aus Aufgabe 2, Blatt 0, diesmal unter Benutzung des Satzes von Fubini. Bestimmen Sie zudem die Kovarianz von X und Y aus dieser Aufgabe.

(b) Im Inneren eines Würfels werde zufällig ein Punkt (x, y, z) ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Koordinaten x, y, z monoton steigend sind.

Aufgabe 19 (5 Punkte)
X sei eine nichtnegative ZG mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie

(a) $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx$.

(b) $\sum_{n\geq 1} p(n-1)^{p-1}\mathbb{P}(X > n) \leq \mathbb{E}X^p \leq \sum_{n\geq 0} p(n+1)^{p-1}\mathbb{P}(X > n)$ für alle $p \geq 1$.

Bitte wenden!

Bonusaufgabe: Eulers Formel (3 Zusatzpunkte)
Nach einer Überdosis Casino lässt sich James Bond von Q eine Zeitmaschine bauen und reist damit in die Vergangenheit, um mit Euler über sein φ zu diskutieren. Euler schwärmt von der von ihm entdeckten Identität

$$\varphi(n) = n \prod_{p \in P_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, wobei P_n die Menge aller Primteiler in $\mathbb{N}$ von n bezeichnet, und ist überzeugt, dass Bond darüber die Stochastik für einen Augenblick vergessen kann. Bond, der sich eigentlich auf etwas ungetrübte Algebra gefreut hatte, ist jedoch etwas enttäuscht: "Wenn ich weiter Wahrscheinlichkeitstheorie hätte betreiben wollen, hätte ich genauso gut auch im Casino bleiben können."
Zeigen Sie, dass es tatsächlich einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis der obigen Identität gibt, indem Sie zu jedem Primteiler $p \in \mathbb{N}$ von n das Ereignis $\{p, 2p, 3p, ..., n\}$ in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum betrachten.
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Eulersche φ-Funktion $\varphi(n)$ definiert als die Anzahl an Zahlen in $\{1, ..., n\}$, die teilerfremd zu n sind.