Übungen

Abgabetermin: Dienstag 30.4. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: $\mathfrak{L}^p$-Räume, $\mathfrak{L}^p$-Konvergenz und μ-Stetigkeit

Aufgabe 12 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, f und g zwei $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktionen auf Ω und $0 < p < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $\|f\|_\infty = \inf_{N:\mu(N)=0} \sup_{\omega \in N^c} |f(\omega)|$

(b) $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

(c) $f \in \mathfrak{L}^\infty(\mu) \;\Rightarrow\; \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Es seien $X \in \mathfrak{L}^p$ und $Y \in \mathfrak{L}^q$, $p, q \geq 1$.

(a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < \alpha < 1$$

mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung.

(b) Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung

$$\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \, (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \;\text{ für alle } 1 < p, q < \infty \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

mit Hilfe der Ungleichung aus Teil (a).

Aufgabe 14 (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: Gegeben $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine im p-ten Mittel konvergente Folge mit Limes $f \in \mathfrak{L}^p(\mu)$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine im q-ten Mittel konvergente Folge mit Limes $g \in \mathfrak{L}^q(\mu)$. Dann konvergiert die Produktfolge $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ im Mittel gegen das Produkt fg.

(b) Beweisen Sie, dass aus der $\mathfrak{L}^p$-Konvergenz, $1 \leq p < \infty$, einer Folge von ZG gegen eine weitere ZG bereits die stochastische Konvergenz folgt. Gilt auch die Rückrichtung?

Bitte wenden!

Aufgabe 15 (5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Maßraum sowie μ und ν Maße auf diesem. Weisen Sie jeweils nach, dass $\nu(N) = 0$ für alle $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gilt, und geben Sie jeweils eine Funktion f an mit $\nu(A) = \int_A f d\mu$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

(a) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ beliebig, $A_0 \in \mathfrak{A}$ fest und $\nu(A) := \mu(A \cap A_0)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

(b) $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, P und Q beliebige W-Maße, $\mu := P + Q$, $\nu := P$.

(c) $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, μ ein beliebiges W-Maß, dessen Zähldichte überall positiv ist, und ν ein beliebiges W-Maß.