Institut für
Mathematische Statistik

Klausurvorbereitung

Abgabetermin: Freitag 12.7. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

Dieser Zettel dient der Klausurvorbereitung und der Wiederholung des Stoffes aus den letzten Vorlesungen. Aufgaben, die reines Wissen oder Beweise aus der Vorlesung abfragen und theoretisch durch Nachschlagen im Vorlesungsskript gelöst werden können, dienen zum Abprüfen des gelernten Stoffes (Aufgaben dieses Typs können auch in der Klausur dran kommen!), und bringen keine Zusatzpunkte. Die Musterlösung wird direkt nach der Abgabefrist online gestellt, die Abgaben können ab dem 16.7. bei Andrea Winkler und Sören Gröttrup in Raum 212 abgeholt werden.

Zusatzaufgabe I (3* Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Hölderungleichung für p, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \neq 1$ im Allgemeinen nicht gilt.

(b) Es sei X eine nicht-negative ZG in $\mathfrak{L}^p$ für ein $p > 1$ und $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration. Zeigen Sie, dass auch $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{L}^p$ ist.

(c) Es sei X eine nicht-negative ZG in $\mathfrak{L}^p$ für ein $p \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass dann $n^p\mathbb{P}(X > n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Zusatzaufgabe II (3* Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathit{Normal}(n, n))$. Ferner sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$X(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} | \omega_n \leq n\}, \quad \inf\emptyset := \infty.$$

(a) Beweisen Sie folgende Abschwächung von Korollar 6.57: Die eindimensionalen Projektionen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\pi_n : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sind paarweise unabhängig.

(b) Zeigen Sie, dass X eine $(\mathfrak{A}, \mathscr{P}(\overline{\mathbb{N}}))$-messbare Funktion ist.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}^X$ und $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^X$.

Zusatzaufgabe III (3* Punkte)

Seien X und Y zwei ZG.

(a) Definieren Sie den bedingten Erwartungswert von X gegeben Y und beweisen Sie $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}X$.

(b) Besitze Y die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte

$$f(y) = \frac{1}{y^2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$$

und sei X gegeben $Y = y$ für $y \in (1, \infty)$ gleichverteilt auf $(0, y)$.

(i) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X|Y)$.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\frac{X}{Y}$.

(iii) Bestimmen Sie eine Version der bedingten Verteilung $\mathbb{P}^{Y|X}$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe IV (3* Punkte)

(a) Definieren Sie die Begriffe Super-, Sub-, und Martingal und geben Sie das Optional Sampling Theorem an.

(b) Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Supermartingal mit $EX_n = EX_0$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bildet.

(c) Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein integrierbarer Prozess, der bzgl. einer Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ adaptiert sei. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ genau dann ein Martingal bildet, wenn $EX_\tau = EX_0$ für jede beschränkte $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$-Zeit τ gilt.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei X_n definiert wie in Zusatzaufgabe I (b). Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein fast sicher konvergentes Martingal bzgl. $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.