Übungen

Abgabetermin: Dienstag 9.7. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: regulär bedingte Verteilungen, Martingale

Aufgabe 48 (5 Punkte)

$X_1,...,X_n$ seien unanbhängige und identisch $Normal(0,1)$-verteilte ZG und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Bestimmen Sie eine Version der bedingten Verteilung $\mathbb{P}^{S_n|X_1=x}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von $\mathbb{P}^{X_1|S_n}$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dichte aus (b) den Erwartungswert $\mathbb{E}X_1S_n$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass S_n $Normal(0,n)$-verteilt ist.

Aufgabe 49 (4+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie zu dem Vektor (X,Y) aus Aufgabe 46(b) eine Version der bedingten Verteilung $\mathbb{P}^{X|Y=y}$ für ein $y \in \mathbb{R}$ und damit erneut eine Version von $\mathbb{E}(X|Y=y)$ sowie $\mathbb{E}(X^2|Y=y)$.

(b) Es seien X_1, X_2 unabhängige und identisch $Unif[0,1]$-verteilte ZG. Definiere $Y := \min\{X_1, X_2\}$ sowie $Z := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von Y und Z und mit dieser eine Version der bedingten Verteilung von Y gegeben $Z = z$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für einen Zufallsvektor (X,Y) mit $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte f und gemeinsamer Verteilungsfunktion $F(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$ gilt

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y).$$

Aufgabe 50 (3 Punkte)

Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von ZG mit endlichem Erwartungswert genüge für $n \ge 1$ der Bedingung $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_0, X_1, ..., X_n) = aX_n + bX_{n-1}$, wobei $0 < a, b < 1$ und $a + b = 1$. Finden Sie einen Wert α, für den $Y_n = \alpha X_n + X_{n-1}$, $n \ge 1$, ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 51 (2+3 Punkte)

(a) Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ ein quadratisch integrierbares Martingal (d.h. es gelte $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ für alle $n \geq 0$). Zeigen Sie, dass die Zuwächse

$$\Delta M_n := M_n - M_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

paarweise unkorreliert sind.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) ein schwaches Gesetz der großen Zahlen für Martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unter der Annahme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\Delta M_n)^2 < \infty$, d.h. zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Zusatzaufgabe (3* Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda\!\!\lambda_{[0,1]})$, $\alpha \in (0,1)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{\omega \in \Omega | \omega_n \leq \alpha\}$, $X_n := \mathbb{1}_{A_n}$ und $Y_n := \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n A_i}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{X_n = 0 \text{ u.o.}\}$ und $\{\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n < \infty\}$ terminal sind bzgl. der Folge $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathfrak{A}_n = \sigma(X_1,...,X_n)$, und bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ u.o.})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{Y_n}{\alpha^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der kanonischen Filtration ist. Zeigen Sie weiter mit Hilfe von
(i) Aufgabenteil (a),
(ii) Satz 5.6 aus dem Stochastik-Skript,
dass dieses Martingal fast sicher gegen 0 konvergiert.