Übungen

Abgabetermin: Dienstag 2.7. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: (faktorisierter) bedingter Erwartungswert und regulär bedingte Verteilungen

Aufgabe 44 (2+2 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $\mathscr{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, $X \in \mathfrak{L}^2(\mathfrak{A})$ und

$$\mathbb{V}ar(X|\mathscr{F}) := \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}\left(X|\mathscr{F}\right)\right)^2 |\mathscr{F}\right)$$

die *bedingte Varianz* von X unter $\mathscr{F}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{V}ar(X|\mathscr{F}) = \mathbb{E}(X^2|\mathscr{F}) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F})^2$.

(b) $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(X|\mathscr{F})) + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}))$.

Aufgabe 45 (1+3+2 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, verteilter ZG und $Y_n := \min_{1\le i\le n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y_n.

(b) Zeigen Sie $\mathbb{P}(X_1 = Y_n|X_1 = x) = e^{-\lambda x(n-1)}$ für $\mathbb{P}^{X_1}$ f.a. $x \in [0, \infty)$, und bestimmen Sie damit $\mathbb{P}(X_1 = Y_n)$.

(c) Bestimmen sie eine Version von $\mathbb{E}(Y_n|Y_k = x)$ für $k < n$.

Aufgabe 46 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Funktion um eine $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte handelt:

$$f(x,y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-y^2(x-y)^2/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times[1,\infty)}(x,y)$$

(b) Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte f aus Teil (a). Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X|Y = y) = y$ für $\mathbb{P}^Y$-fast alle y gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 47 (1+2+3 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von ZG mit Werten in $(S,\mathcal{S}) = (\{1,2,3\}, \mathfrak{P}(\{1,2,3\}))$ und $\mathbb{P}(X_n = s) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in S$. Sei weiter für $n \in \mathbb{N}$

$$K_n : S^n \times \mathcal{S} \to [0,\infty], \quad ((s_0,\dots,s_{n-1}),A) \mapsto \sum_{s\in A} p(s_{n-1},s)$$

mit einer Matrix $P = (p(r,s))_{r,s\in S} \in [0,1]^{3\times 3}$, deren Zeilensummen 1 ergeben.

(a) Zeigen Sie, dass K_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen stochastischen Kern bildet.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ sei $K_n(\,\cdot\,,\{s\})$ eine Version von $\mathbb{P}(X_n = s|(X_{n-1},\dots,X_0) = \,\cdot\,)$. Zeigen Sie, dass $p(\,\cdot\,,s)$ dann auch eine Version von $\mathbb{P}(X_n = s|X_{n-1} = \,\cdot\,)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in S$.

(c) Gegeben die Voraussetzungen aus (b) sei nun konkret

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}^{X_n}$ für beliebiges $n \geq 1$ in Abhängigkeit von $\mathbb{P}^{X_0}$ und P und untersuchen Sie diese Verteilung auf schwache Konvergenz.

Zusatzaufgabe (3* Punkte)
Wie in Aufgabe 18(b) werde im Innern des Würfels $[0,1]^3$ zufällig ein Punkt (X,Y,Z) ausgewählt.

(a) Bestimmen Sie für ein beliebig vorgegebenes $x \in [0,1]$ eine Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^2$, für die $\mathbb{P}(X \leq Y \leq Z|X = x) = \lambda\!\!\lambda^2(A)$ gilt. Kann dieses A als $A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $i = 1,2$, geschrieben werden?

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit aus (a) graphisch (geometrische Wahrscheinlichkeiten) und analytisch (Berechnung des Integrals).