Übungen

Abgabetermin: Dienstag 23.4. um 10 Uhr, Briefkästen 131-134

THEMEN: Pseudoinverse und Verteilungskonvergenz

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Sei X eine ZG mit Verteilungsfunktion F und F^- die Pseudo-Inverse, definiert durch

$$F^-(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \ F(t) \geq x\}, \ x \in [0,1],$$

mit $\inf \emptyset := \infty$ und $\inf \mathbb{R} := -\infty$. Zeigen Sie:

(a) $F^- : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist monoton wachsend.

(b) $F(F^-(x)) \geq x \geq \lim_{t \uparrow F^-(x)} F(t)$ für alle $x \in [0,1]$.

(c) F^- ist linksseitig stetig.

(d) $F(F^-(x)) = x$ für alle $x \in [0,1] \iff F$ ist stetig.

(e) $F(X) \stackrel{d}{=} U$ für jede auf $(0,1)$ gleichverteilte ZG U, falls F stetig ist.

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Überprüfen Sie, ob schwache Konvergenz vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes:

(a) $\mu_n = Poisson(\alpha_n)$, $\alpha_n \in (0,\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to \alpha \in [0,\infty)$

(b) $\mu_n = f_n \lambda\!\!\lambda$ mit $f_n(x) = (1-\cos(2\pi n x))\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

(c) $\mu_n = \ Unif[-n,n]$

(d) $\mu_n = Normal(\mu, \frac{1}{n}), \mu \in \mathbb{R}$

(e) $\mu_n = Normal(0,n)$

Aufgabe 10 (5 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge positiver, unabhängiger und identisch verteilter ZG mit $\mu := \mathbb{E}X_1$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}arX_1 < \infty$. Ferner sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\mu^2}{\overline{X}_n} - \overline{X}_n\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 4\sigma^2), \quad \text{falls } n \to \infty.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 11 (3+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jedes W-Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ schwacher Limes einer Folge diskreter Maße ist.

(b) Seien μ, μ_1, μ_2,... W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ und ν ein weiteres Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, bezüglich dessen μ, μ_1, μ_2,... die Dichten f, f_1, f_2,... haben. Außerdem konvergiere $(f_n)_{n\geq 1}$ ν-fast überall gegen f. Zeigen Sie, dass μ_n schwach gegen μ konvergiert.