Übungen

Abgabetermin: Die Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde besprochen.
THEMEN: Wiederholung der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 1

Es sei $\Omega = \{1,...,4\}$, $\mathfrak{A}_1 := \sigma(\{1\},\{2\})$ und $\mathfrak{A}_2 := \sigma(\{2,3\})$ zwei σ-Algebren auf Ω und $p_i : \Omega^2 \to (\Omega, \mathfrak{A}_i)$, $p_i(\omega_1, \omega_2) := \omega_i$ für $i = 1,2$ zwei Abbildungen. Bestimmen Sie $p_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)$ für $i = 1,2$ und damit $\sigma(p_1, p_2)$.

Aufgabe 2

Es sei (X,Y) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit der $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2\mathbb{1}_{\left\{(x,y)\in[0,\frac{1}{2}]^2\right\}} + \frac{2}{3}\mathbb{1}_{\left\{(x,y)\notin[0,\frac{1}{2}]^2\right\}}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzgl. $\lambda\!\!\lambda^2$ bildet und bestimmen Sie die $\lambda\!\!\lambda$-Dichten der Randverteilungen $\mathbb{P}^X$ und $\mathbb{P}^Y$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

Aufgabe 3

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & x \geq 0,\ x \leq y < x+1 \\ -1, & x \geq 0, x+1 \leq y < x+2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

$$\int\int f(x,y)\ \lambda\!\!\lambda(dy)\lambda\!\!\lambda(dx) \neq \int\int f(x,y)\ \lambda\!\!\lambda(dx)\lambda\!\!\lambda(dy).$$

Welche Kriterien kennen Sie, damit bei einem Riemann-Doppelintegral die Integrationsreihenfolge vertauscht werden kann?

Aufgabe 4

$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $f : \Omega \to [0,\infty)$ μ-integrierbar und $\nu(A) := \int_A f d\mu, A \in \mathfrak{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass ν ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, und weiter mit dem Funktionserweiterungsargument, dass $\nu(N) = 0$ für jedes $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ν-integrierbar gilt $\int_A g d\nu = \int_A g \cdot f d\mu$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5
Es sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ mit $\mathbb{P}((-\infty, t]) = \mathbb{P}([-t, \infty))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem definieren wir für alle $B \subseteq \mathbb{R}$ die Menge $-B := \{-b | b \in B\}$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathscr{B}$ bereits $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(-A)$ gilt.

Aufgabe 6
μ sei eine Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ und $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$.

(a) Geben Sie die minimale σ-Algebra $\mathfrak{A}$ an, unter der f $\mathfrak{A}$-$\mathscr{B}([0, \infty))$-messbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Bildmaßes μ^f.

Aufgabe 7
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{A}$ ein Mengensystem. $\mathfrak{G}$ heißt $\mathbb{P}$-*trivial*, falls $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathfrak{G}$. Zeigen Sie:

(a) Ein $\mathbb{P}$-triviales Mengensystem ist von jeder σ-Algebra $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}$ unabhängig.

(b) Ein Mengensystem, das von sich selbst stochastisch unabhängig ist, ist $\mathbb{P}$-trivial.

(c) Für zwei Mengensysteme $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \text{ sind stochastisch unabhängig} \iff \mathfrak{G}_1 \text{ ist } \mathbb{P}\text{-trivial.}$$