Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 12** **01.07.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies Black-Scholes Modell mit deterministischer zeitabhängiger Volatilität σ und deterministischer zeitabhängiger Zinsrate r. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes erfüllt der Aktienpreisprozess also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(r(t) + \sigma(t)dW^*(t))$$

mit Anfangskurs $S_0 = x > 0$.

1. Berechnen Sie den Preis eines digitalen Calls, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis in T die Basis $K > 0$ überschreitet.
2. Berchnen Sie den Preis eines entsprechenden digitalen Puts, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis die Basis $K > 0$ unterschreitet.
3. Berechnen Sie für beide Optionen die jeweilige Hedgestrategie.
4. Wie kann für eine Funktion $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $\mathbb{E}^* h(S_T) < \infty$ der Preis eines Derivates mit Auszahlung $h(S_T)$ durch die Preise von digitalen Optionen ausgedrückt werden.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit konstanter Volatilität $\sigma > 0$ und Zinsrate $r \in \mathbb{R}$. Sei $C(x, t, \sigma, K, r)$ der Preis einer Calloption mit Basis K, Laufzeit t und Anfangsaktienkurs $x > 0$. Zeigen Sie für alle $t > 0, x > 0$

1. $\Delta_t = \partial_x C(x, t, \sigma, K, r) = \Phi(h_1(x, t))$ Delta der Option
2. $\Gamma_t = \partial_x^2 C(x, t, \sigma, K, r) = \frac{\phi(h_1(x,t))}{x\sigma\sqrt{t}}$ Gamma der Option
3. $\kappa_t = \partial_K C(x, t, \sigma, K, r) = -e^{-rt}\Phi(h_2(x, t))$ Kappa der Option
4. $\mathcal{V}_t = \partial_\sigma C(x, t, \sigma, K, r) = x\sqrt{t}\phi(h_1(x, t))$ Vega der Option
5. $\rho = \partial_r C(x, t, \sigma, K, r) = tKe^{-rt}\Phi(h_2(x, t))$ Rho der Option
6. $\Theta_t = \partial_t C(x, t, \sigma, K, r) = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\phi(h_1(x, t)) + rKe^{-rt}\Phi(h_2(x, t))$ Theta der Option

mit $h_1(x,t) = \frac{\log\frac{x}{K} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$, $h_2(x,t) = \frac{\log\frac{x}{K} + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$.
Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3: Hull White Volatilitätsmodell 4 Punkte

Das stochastische Volatilitätsmodell nach Hull White hat bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ die Darstellung

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(rdt + Y_t dW_1(t)), \\ dY_t &= Y_t(\mu dt + \delta dW_2(t)) \end{aligned}$$

mit unabhängigen Wienerprozessen W_1, W_2.

1. Lösen Sie die obige stochastische Differentialgleichung.
2. Wird $\mathbb{P}^*$ als Bewertungsmaß gewählt, so versuchen Sie eine Formel für den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit T und Basis K zu finden.
3. Formulieren Sie einen PDE Ansatz mit dem der Preis der Calloption berechnet werden kann.

Gehen Sie bei diesem Modell von einer konstanten Zinsrate $r > 0$ aus.

Abgabe: Die. 09.07.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135