Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **24.06.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell für zwei Aktien mit deterministischen Koeffizienten. Die Aktienpreisprozesse erfüllen also

$$\begin{array}{rcl} dS_1(t) & = & S_1(t)(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_1(t) + \sigma_{12} dW_2(t)) \\ dS_2(t) & = & S_2(t)(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_1(t) + \sigma_{22} dW_2(t)) \end{array} ,$$

mit Anfangsbedingung $S_1(0) = x_1 > 0, S_2(0) = x_2 > 0$, Driftvektor $\mu \in \mathbb{R}^2$ und Volatilitätsmatrix σ, die als invertierbar angenommen wird.

Wir betrachten weiter einen T-Claim, der zum Zeitpunkt T eine Auszahlung der Form $C = h(S_T)$ verursacht und nehmen an, dass diese unter dem äquivalenten Martingalmaß einen endlichen Erwartungswert hat.

1. Bestimmen Sie eine partielle Differentialgleichung, die die Preisfunktion

$$v(t,x) = \mathbb{E}^*(h(S_T)e^{-r(T-t)}|S_1(t) = x_1, S_2(t) = x_2)$$

   für alle $t < T, x \in (0,\infty)^2$ erfüllt.

2. Wie können Sie die Lösung benutzen, um eine Hedgestrategie zu bestimmen. Dabei wird ein Hedge bestimmt durch einen previsiblen Prozess $H = (H_1, H_2)$ derart, dass

$$e^{-rT}C = e^{-rT}\mathbb{E}^*C + \int_0^T H_1(t)dS_1^*(t) + \int_0^T H_2(t)dS_2^*(t).$$

3. Bestimmen Sie für den Fall $g(x) = (x_1 - K)^+$ die Preisfunktion und Hedgestrategie.

4. Bestimmen Sie für den Fall $g(x) = (x_1 - x_2)^+$ die Preisfunktion und Hedgestrategie.

Aufgabe 2: Firmenwertansatz von Merton 4 Punkte

Der Firmenwertansatz von Merton ist eine Methode ausfallgefährdete Unternehmensanleihen mit Optionspreistheorie zu bewerten. Im ursprünglichen einfachsten Modell wird eine Firmenwertentwicklung (X_t) der Form

$$dX(t) = X(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert $x_0 > 0$ angenommen. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass Kapital auf einem Geldmarktkonto sich mit der konstanten Rate $r > 0$ verzinst.

Ein Fremdkapitalgeber der Firma leiht der Firma einen Nominalbetrag F für T Zeiteinheiten. Dieser Kredit kann dann zurückgezahlt werden, wenn das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt T die Verbindlichkeit F übersteigt. Reicht das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt T nicht aus, um die Verbindlichkeit vollständig zu begleichen, muss die Firma Konkurs anmelden und die Konkursmasse zur weitestgehenden Begleichung der Schulden benutzen.

Das Eigenkapital der Firma zur Zeit t ist das Vermögen zu diesem Zeitpunkt vermindert um den Wert des Fremdkapitals zur Zeit t.

1. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass das gesamte Fremdkapital nur von einer Adresse gegeben wird, den Wert der Position des Fremdkapitalgebers. Hinweis: Wie können Sie die Position des Fremdkapitagebers durch ein Derivat beschreiben.

2. Wie können Sie die Position des Eigenkapitalgebers durch ein Derivat beschreiben und wie können Sie diese bewerten.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies, vollständiges Finanzmarktmodell und C ein T-Claim, derart dass $C \geq 0$ und $\mathbb{E}C^* < \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass $C_t = \beta(t)\mathbb{E}^*(C^*|\mathfrak{F}_t)$ für alle $0 \leq t \leq T$ die stochastische Differentialgleichung

$$dC(t) = C(t)(r(t)dt + \sigma_C(t)dW^*(t))$$

für einen geeigneten previsiblen Prozess σ_C erfüllt, wobei W^* einen Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$ definiert und $r(t)$ die risikolose Zinsrate im Modell bezeichnet.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $C(t) > 0$ gilt für alle $0 \leq t < T$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten für zwei Aktien bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes in der Form

$$\begin{array}{rcl} d\beta(t) & = & \beta(t)rdt \quad , \\ dS_1(t) & = & S_1(t)(rdt + \sigma_1 dW_1(t)) \quad , \\ dS_2(t) & = & S_2(t)(rdt + \sigma_2 dW_2(t)) \end{array}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei sind W_1, W_2 stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse und $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$.

Bestimmen Sie den Preis der geometrischen Put-Option, deren Auszahlung gegeben ist durch

$$C = (K - S_1(T)^{\alpha_1} S_2(T)^{\alpha_2})^+$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Bestimmen Sie eine Hedgestrategie.

Abgabe: Die. 02.07.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135