Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **17.06.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit variabler deterministischer Volatilität σ und Zinsrate r über einen Handelszeitraum $[0, T]$. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ hat der Aktienpreisprozess eine Darstellung der Form

$$S_t = xe^{\int_0^t r(s)ds} \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds), \qquad 0 \le t \le T$$

mit einem Wiener-Prozess W bezüglich $\mathbb{P}^*$. Der Anfangspreis werde hier mit $x > 0$ bezeichnet. Die Entwicklung des Bankkontos ist gegeben durch

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds), \qquad 0 \le t \le T.$$

Zeigen Sie:

1. Für $0 \le t \le T$ und $\alpha > 0$ ist

$$\mathbb{E}^*(\frac{S_T^\alpha}{\beta(T)}|\mathfrak{F}_t) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)r(s)ds + \int_t^T \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2(s)ds} \exp(\int_0^t \alpha\sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\alpha\sigma(s))^2 ds).$$

2. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\mathbb{E}^*(\frac{S_T^\alpha}{\beta(T)}) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds}.$$

3. Der arbitragefreie Anfangspreis $p(C)$ des Claims, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung

$$C = (S_T^\alpha - K)^+$$

liefert, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(C) &= h(T)\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \int_0^T \alpha(r(s) + \sigma^2(s)(\alpha - \frac{1}{2}))ds}{\alpha\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}\right) \\ &\quad - Ke^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \alpha\int_0^T (r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds)}{\alpha\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}\right) \end{aligned}$$

mit $h(T) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds}$.

Hinweis: $p(C) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}(S_T^\alpha - K)^+$.

4. Geben sie eine Hedgestrategie für C an.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten. Wir bezeichnen mit (S_t) den Aktienpreisprozess und betrachten eine Call-Option mit Laufzeit T zur Basis K, die entsprechend ihrem arbitragefreien Preisprozess

$$C(t) = e^{r(t-T)}\mathbb{E}^*((S_T - K)^+|\mathfrak{F}_t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gehandelt werden kann. Wie kann durch einen Handel in Aktie und Call-Option das Geldmarktkonto repliziert werden?

Aufgabe 3: 4 Punkte

Geben Sie ein arbitragefreies Finanzmarktmodell, einen T-Claim C sowie eine zulässige Handelsstrategie H mit $\mathbb{E}^*C^* \neq 0$ an, so dass

$$\int_0^T H(t)dS^*(t) = C^*$$

gilt. Ist H eine Hedgestrategie?

Aufgabe 4: Allgemeine Callformel 4 Punkte

Gegeben sei eine Wienerfiltration eines n-dimensionalen Wienerprozesses über einen Handelszeitraum $[0, T]$, ein Bankkontoprozess β der Form

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

mit stetigem adaptierten Zinsratenprozess r und ein positiver Aktienpreisprozess $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ mit stetigen Pfaden.

Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ vorliegt und wollen eine Calloption mit Laufzeit T und Basis K bewerten.

Zeigen Sie, dass es zu $\mathbb{P}^*$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^*$ gibt mit

$$\mathbb{E}^*\frac{(S(T)-K)^+}{\beta(T)} = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(T) > K) - KB(0,T)\mathbb{P}_2^*(S_T > K),$$

wobei $B(0, T) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}$.

Abgabe: Die. 25.06.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135