Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 09** **10.06.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Informationsverlauf gegeben durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse W_1, W_2 und nehmen an, dass unter einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß P die augenblickliche Zinsrate eines Geldmarktkontos sich entwickelt entsprechend

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW_1(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b, \delta > 0$.

Das Geldmarktkonto entwickelt sich also entsprechend

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$.

Weiter ist in diesem Finanzmarkt eine Aktie mit Preisprozess $S(t)$ gegeben durch

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_2(t)) \quad , S(0) = x_0 > 0$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

1. Ist das Modell arbitragefrei?
2. Ist gegebenenfalls das äquivalente Martingalmaß eindeutig?
3. Führen Sie einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ durch, so dass die Dynamik der Zinsrate r erhalten bleibt und die der Aktie gegeben ist durch
$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma d\bar{W}_2(t))$$
mit Wiener-Prozess $\bar{W}_2$ bezüglich $\mathbb{P}^*$.
4. Berechnen Sie für eine Call-Option mit Laufzeit T
$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir ersetzen in Aufgabe 1 den Vasicek-Prozess für die Zinsrate durch einen CIR Prozess. Der Prozess r erfüllt also die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta\sqrt{r(t)}dW(t)$$

mit $a, b, \delta > 0$. Wir nehmen weiter an, dass $2ab \geq \delta^2$.

Ist dieses Modell arbitragfrei? Geben Sie bei positiver Antwort ein äquivalentes Martingalmaß an.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell, dass von zwei Wiener-Prozessen getrieben wird. Dies bedeutet, dass der Preisprozess des risikobehafteten Finanzgutes die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 dW_2(t))$$

für alle $0 \leq t < T$ erfüllt bei einem Anfangswwert $S(0) > 0$. Hierbei sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}$ mit $\sigma \neq 0$. Das Geldmarktkonto verzinst sich mit fester Zinsrate $r \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Menge $\mathfrak{P}^*$ der äquivalenten Martingalmaße.
2. Bestimmen Sie für eine Call-Option mit Auszahlung $C = (S_T - K)^+$ zum Zeitpunkt T
$$\mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)}$$
für alle $\mathbb{P}^* \in \mathfrak{P}^*$.
3. Bestimmen Sie ein $\mathfrak{F}_T$-messbares C, so dass
$$\inf_{\mathbb{P}^* \in \mathfrak{P}^*} \mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)} < \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathfrak{P}^*} \mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Seien weiter $T > 0$ und $f : [0, T) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(t) \neq 0$ für alle $0 \leq t < T$ und $\int_0^T f(t)^2 dt = \infty$. Definiere die Funktion η durch $\eta(t) = \int_0^t f^2(s)ds$ und den Prozess M durch $M(t) = \int_0^t f(s)dW(s)$ für alle $0 \leq t < T$ Zeigen Sie:

1. $(M(t))_{0\leq t<T}$ ist ein L_2 Martingal mit η als quadratischem Variationsprozess.
2. Definiert man für jedes $s \geq 0$ die σ-Algebra $\mathfrak{G}_s$ durch $\mathfrak{G}_s = \mathfrak{F}_{\eta^{-1}(s)}$, so wird durch $B(s) = M(\eta^{-1}(s))$ für alle $s \geq 0$ ein Wiener-Prozess bezüglich $(\mathfrak{G}_s)_{s\geq 0}$ definiert. M ist also ein zeittransformierter Wiener-Prozess.

Abgabe: Die. 18.06.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135