Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **03.06.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozess und S eine Lösung von

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert $S(0) > 0$, wobei $r \in \mathbb{R}$ eine konstante Zinsrate und $\sigma > 0$ eine konstante Volatilität bezeichnen. Bestimmen Sie den Preis eines Derivates, das in $T > 0$ die Auszahlung $S(T)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ liefert, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT} S(T)^\alpha.$$

Aufgabe 2: 6 Punkte

Seien W_1, W_2 unabhängige Wiener-Prozesse bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$. Definiere den Preisprozess von zwei Aktien durch

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0) \exp(rt) \exp(\sigma_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t), \\ S_2(t) &= S_2(0) \exp(rt) \exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei ist $r \in \mathbb{R}$ die Zinsrate des Geldmarktkontos und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ die Volatilitäten der Aktien.

Berechnen Sie den Preis

1. einer Call-Option mit Basis K und Laufzeit T, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT}(S_1(T) - K)^+,$$

2. einer Put-Option mit Basis K und Laufzeit T, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT}(K - S_1(T))^+,$$

3. einer Exchange Option, die das Recht verbrieft, Aktie 1 in Aktie 2 zu tauschen, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT}(S_2(T) - S_1(T))^+,$$

4. einer Exchange Option, die das Recht verbrieft, Aktie 2 in Aktie 1 zu tauschen, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT}(S_1(T) - S_2(T))^+.$$

5. Was für eine Parität gilt zwischen den Preisen von Exchange Optionen. Denken Sie daran, dass dies eine Verallgemeinerung der Put-Call Parität ist.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ und S eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

für alle $0 \leq t < T$ bei einem Anfangswert $S(0)$. Sei weiter $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichtequotientenprozess

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\right)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ für einen vorhersehbaren Prozess θ, der $\int_0^T \theta^2(s)ds < \infty$ erfüllt. Schließlich sei $S^*(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) S(t)$ definiert für alle $0 \leq t < T$ mit $r(t) = \mu(t) - \theta(t)\sigma(t)$.

1. Bestimmen Sie einen vorhersehbaren Prozess $H(t)_{0\leq t<T}$ mit $\int_0^t H^2(s)\sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $0 \leq t < T$ und ein Anfangskapital V_0, so dass

   $$\frac{1}{L_T} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$

   gilt.

2. Ist θ eine deterministische Funktion, so bestimmen Sie für $\gamma > 0$ einen vorhersehbaren Prozess $H(t)_{0\leq t<T}$ mit $\int_0^t H^2(s)\sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $0 \leq t < T$ und ein Anfangskapital V_0, so dass

   $$\frac{1}{L_T^\gamma} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$

   gilt.

Abgabe: Die. 11.06.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135