Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **27.05.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der die usual conditions erfüllt. Sei L ein positives, stetiges lokales Martingal mit Darstellung der Form

$$L_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$$

für alle $t \geq 0$, wobei $M_t = \int_0^t \frac{1}{L_s} dL_s$ für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie:

Es gibt ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß Q auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$ mit $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}|_{\mathfrak{F}_t} = L_t$ für alle $t \geq 0$ genau dann, wenn gilt:

(i) $\lim_{t\to\infty} \langle M\rangle_t < \infty$,

(ii) $\mathbb{E}L_\infty = 1$.

Hierbei ist $L_\infty = \exp(M_\infty - \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty)$, $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$.

Hinweis: Ohne Beweis können Sie das folgende starke Gesetz der großen Zahlen für lokale stetige Martingale M benutzen:

Auf dem Ereignis $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$ gilt $\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{\langle M\rangle_t} = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien W ein zweidimensionaler Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, so dass $\mathfrak{F}$ die Wiener-Filtartion von W ist. Seien $\sigma_1, \sigma_2, \mu : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ deterministische Funktionen mit $\int_0^t |\sigma(s)|^2 ds < \infty$, $\int_0^t |\mu(s)| ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Definiere den Prozess S durch

$$S_t = \exp(\int_0^t \sigma_1(s) dW_1(s) + \int_0^t \sigma_2(s) dW_2(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma(s)| ds) \exp(\int_0^t \mu(s) ds)$$

für alle $t \geq 0$.

Wann gibt es ein zu $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$, so dass für $S^*(t) = \exp(-\int_0^t r(s) ds) S(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt

$$dS^*(t) = S^*(t)(\sigma_1(t) dW_1^*(t) + \sigma_2(t) dW_2^*(t)).$$

Hierbei ist r eine vorgegebene deterministische Funktion mit $\int_0^t |r(s)| ds < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien W_1, W_2 Wiener-Prozesse bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\langle W_1, W_2\rangle_t = \rho t$ für ein $\rho \in (-1,1)$. Definiere den Preisprozess von zwei Aktien durch

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0)\exp(\mu_1 t)\exp(\sigma_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t), \\ S_2(t) &= S_2(0)\exp(\mu_2 t)\exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei sind $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ die Trendparameter und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ die Volatilitäten der Aktien.

Wann können Sie zu einem auf $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ übergehen, so dass $(e^{-rt}S_i(t))_{0\leq t\leq T}$ Martingale sind bezüglich $\mathbb{P}^*$. Welche stochastische Differentialgleichungen erfüllen die Aktienpreisprozesse bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Aufgabe 4: Bayesformel 4 Punkte

Seien $\mathbb{P}, Q$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ mit Dichte $L = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Sei $\mathfrak{G}$ eine Unter $\sigma-$ Algebra von $\mathfrak{F}$.

Zeigen Sie:

1. Durch $\frac{1}{L}$ wird eine Dichte von $\mathbb{P}$ bezüglich Q definiert.
2. Für jede Zufallsvariable Y, die quasi-integrierbar bezüglich Q ist, gilt

$$\mathbb{E}(L|\mathfrak{G})\mathbb{E}_Q(Y|\mathfrak{G}) = \mathbb{E}(LY|\mathfrak{G}).$$

Abgabe: Die. 04.06.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135