

Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 06

13.05.2013

Aufgabe 1:

4 Punkte

Sei U ein abgeschlossener Teilraum von \mathcal{H}_2 , der invariant ist unter Stoppen. Dies bedeutet, dass für jedes $M \in U$ und jede Stoppzeit τ der gestoppte Prozess M^τ wieder in U enthalten ist. Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement V von U auch invariant ist unter Stoppen. Dabei heißen zwei Martingale $M, N \in \mathcal{H}_2$ senkrecht zueinander, falls $\mathbb{E}M_\infty N_\infty = 0$ gilt.

Zeigen Sie weiter, dass im obigen Falle U, V auch stark komplementär sind. Dies bedeutet, dass für Martingale $M \in U$ und $N \in V$ die quadratische Kovariation $\langle M, N \rangle = 0$ ist.

Wieso ist das Bild des stochastischen Integralprozessoperators

$$\{H \cdot M : H \in L_2(\mu_M)\}$$

invariant unter Stoppen?

Aufgabe 2:

4 Punkte

1. Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $\langle M \rangle_\infty < \infty$ \mathbb{P} -fast sicher. Zeigen Sie, dass M_t für $t \rightarrow \infty$ \mathbb{P} -fast sicher gegen eine reellwertige Zufallsgröße konvergiert.
2. Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, dass die Novikov Bedingung $\mathbb{E} \exp(\frac{1}{2} \langle M \rangle_\infty) < \infty$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* gibt mit

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathfrak{F}_t} = \exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t)$$

für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3:

4 Punkte

1. quadrierter Besselprozeß

Sei W ein n -dimensionaler Wiener-Prozess. Für $a \neq 0$ setzen wir $X(t) = a + W(t)$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wiener-Prozess B gibt, so dass $Y(t) = |X(t)|^2$ die stochastische Differentialgleichung

$$dY(t) = 2\sqrt{Y(t)}dB(t) + ndt$$

mit Anfangswert $|a|^2$ erfüllt.

Y heißt quadrierter Besselprozess der Dimension n .

2. quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozeß

Sei X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess und damit Lösung der Gleichung

$$dX(t) = -X(t)dt + dW(t)$$

zu einem Startwert $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wienerprozess B gibt, so dass $Y(t) = X(t)^2$ die Gleichung

$$dY(t) = (1 - 2Y(t))dt + 2\sqrt{|Y(t)|}dB(t)$$

zum Anfangswert a^2 löst.

Y heißt quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess der Dimension 1.

Aufgabe 4:

4 Punkte

1. Seien B_1, B_2 unabhängige eindimensionale Wiener-Prozesse und ρ ein previsibler Prozess mit Werten in $[-1, 1]$. Zeigen Sie, dass es dann eindimensionale Wiener-Prozesse W_1, W_2 gibt mit quadratischem Kovariationsprozess

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \int_0^t \rho(s) ds$$

für alle $t \geq 0$.

2. Sind umgekehrt W_1, W_2 eindimensionale Wiener-Prozesse mit quadratischem Kovariationsprozess

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \int_0^t \rho(s) ds$$

für alle $t \geq 0$, so überlegen Sie sich, dass es unabhängige Wiener-Prozesse B_1, B_2 gibt, so dass W aus B entsprechend dem ersten Teil der Aufgabe konstruiert werden kann. Hierbei müssen Sie allerdings voraussetzen, dass ρ nur Werte in $(-1, 1)$ annehmen kann und dass

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - \rho(s)^2}} ds < \infty$$

für alle $t \geq 0$ \mathbb{P} -fast sicher gilt.

Abgabe: Die. 28.05.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135