Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **06.05.2013**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Wir betrachten die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma X_t dW_t$$

mit Anfangswert $X_0 > 0$. Hierbei sind θ, μ, σ positive Konstanten und W ein Wiener-Prozess.

1. Lösen Sie die obige Gleichung.

   Hinweis: Lösen Sie zunächst $dX_t = X_t(-\theta dt + \sigma dW_t)$ und führen Sie dann eine Variation der Konstanten durch.

2. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X_t$ für alle $t \geq 0$.

3. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X_t^2$ und $\mathrm{Var}X_t$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Wir betrachten einen CIR Prozess X startend aus $X_0 = x > 0$. Dieser löst also die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

mit $\theta, \mu, \sigma > 0$. und Wiener-Prozess W. Ziel ist die Herleitung einer Rekursionsformel für das n-te Moment von X_t.

Bestimmen Sie hierzu zunächst die Semimartingaldarstellung von $(X_t^n)_{t\geq 0}$.

Leiten Sie hieraus eine gewöhnliche Differentialgleichung für $h_n(t) = \mathbb{E}X_t^n$ ab.

Das Lösen dieser Differentialgleichung liefert die gesuchte Rekursionsformel.

Hinweis: Ohne Beweis können Sie benutzen, dass alle Momente des CIR-Prozesses endlich sind.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion der Randverteilungen des Vasicek-Prozesses. Sie betrachten also die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t \quad , \quad X_0 = x$$

mit $\mu, x \in \mathbb{R}$ und $\theta, \sigma > 0$ und berechnen

$$\mathbb{E}e^{\lambda X_t}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

Zusatzaufgabe: 4 Zusatzpunkte

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine drei-dimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = (1,1,1)$ und die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x) := ||x||^{-1}$. Sei weiter M definiert durch $M_t := u(B_t), t \geq 0$.
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $(M_t)_{t\geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar
2. $(M_t)_{t\geq 0}$ ist ein lokales Martingal
3. $(M_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal
4. $\mathbb{E}\langle M\rangle_t < \infty$, für alle $t \geq 0$

Abgabe: Die. 14.05.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135