Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **29.04.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei X ein stetiges lokales Martingal mit $\mathbb{P}(X_t > 0 \text{ f.a. } t \geq 0) = 1$. Zeigen Sie, dass dann ein lokales Martingal M existiert mit

$$X_t = X_0 \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)$$

für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei L ein lokales Martingal. Zeigen Sie.

1. Ist für jedes $T > 0$ die Familie

   $$\{L_\tau : \tau \text{ Stoppzeit mit } \tau \leq T\}$$

   gleichgradig integrierbar, so ist L ein Martingal.

2. Ist die Familie

   $$\{L_\tau : \tau \text{ beschränkte Stoppzeit }\}$$

   gleichgradig integrierbar, so ist L ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei M ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden, dass aus dem Ursprung startet. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{E}(M)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist, falls $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty) < \infty$ gilt.

Aufgabe 4: Hull-White Prozess 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung.

$$dX_t = \theta(t)(\mu(t) - X(t))dt + \sigma(t)dW_t$$

mit Anfangsbedingung X_0.

Hierbei seien θ, μ, σ stetige Koeffizientenfunktionen mit $\sigma(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 07.05.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135