Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 03** **22.04.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozess, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und τ eine Stoppzeit. Definiere einen previsiblen Prozess H durch

$$H_t(\omega) = f(t)1_{(0,\tau(\omega)]}(t)$$

für alle $t \geq 0, \omega \in \Omega$. Zeigen Sie:

1. Durch $M = H \cdot W$ wird ein stetiges L_2-Martingal definiert.
2. Bestimmen Sie den quadratischen Variationsprozess von M.
3. Wieso und gegen welche Grenzvariable konvergiert $L_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t), t \geq 0$ für $t \to \infty$ punktweise $\mathbb{P}$-fast sicher.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion μ_n definiert durch $\mu_n(t) = \mathbb{E}W_t^{2n}$ für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ito-Formel, um eine Rekursionsgleichung für die μ_n, $n \in \mathbb{N}$ herzuleiten. Durch Ausrechnen der ersten Glieder kann dann die Formel erkannt werden, die man dann durch Induktion beweisen kann.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien μ und σ Funktionen von $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^t |\mu(s)|ds < \infty \quad , \quad \int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$$

für alle $t \geq 0$. Definiere den stochastischen Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ durch

$$S_t = \exp\left(\int_0^t \sigma(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right)\exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right)$$

.

1. Zeigen Sie, dass der Prozess S die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)\left(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right)$$

   erfüllt.

2. Benutzen Sie die obige stochastische Differentialgleichung, um eine gewöhniche Differentialgleichung für $f(t) = \mathbb{E}S(t)$ herzuleiten.

3. Lösen sie diese, um f explizit zu bestimmen.

4. Führen Sie die gleiche Prozedur durch zur Bestimmung von $\mathbb{E}S(t)^2$.

5. Berechnen Sie $\mathrm{Var}S(t)$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien W_1 und W_2 Wiener-Prozesse mit $\langle W_1, W_2\rangle_t = \rho t$ für alle $t \geq 0$ für ein $\rho \in (-1,1)$. Definiere die Semimartingale S_1, S_2 durch

$$S_1(t) = \exp\left(\sigma_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t\right), S_2(t) = \exp\left(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t\right)$$

für alle $t \geq 0$. Bestimmen Sie eine stochastische Differentialgleichung, die $\frac{S_1}{S_2}$ erfüllt.

Abgabe: Die. 30.04.2013 bis spätestens 11.00 im Fach