Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 02** **15.04.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

1. Sei $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ mit $M_0 = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast sicher für $\omega \in \{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ $(M_t(\omega))_{t \geq 0}$ konvergent ist für $t \to \infty$.
2. Seien $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und H ein previsibler Prozess mit $\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty$. Zeigen Sie, dass der stochastische Integralprozess $((H \cdot M)_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{P}$-fast sicher konvergent ist.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ ein Standard Wiener-Prozess. Zeigen Sie

1. $\langle W \rangle_t = t$ für alle $t \geq 0$,
2. für eine messbare Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^t f^2(s) ds < \infty$ für alle $t \geq 0$ ist $(f \cdot W)$ ein stetiges L_2-Martingal. Bestimmen Sie das Doléans-Maß von $f \cdot W$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess und $H \in b\mathcal{P}$ definiert durch

$$H = 1_{(0,\tau_a]} + 1_{(\tau_b,\infty)}.$$

Hierbei definieren τ_a, τ_b die Erstbesuchszeit in a bzw. b für $0 < a < b$, also

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}.$$

Bestimmen Sie $H \cdot W$ und $\langle H \cdot W \rangle$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die quadratische Kovariationsbildung verträglich ist mit Stoppen. Für beliebige stetige lokale Martingale M, N und Stoppzeit τ ist also zu zeigen:

$$\langle M, N \rangle^\tau = \langle M^\tau, N \rangle = \langle M, N^\tau \rangle = \langle M^\tau, N^\tau \rangle.$$

Abgabe: Die. 23.04.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135