Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2013

PD Dr. V. Paulsen | **Blatt 01** | **08.04.2013**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie, dass es ein $H \in L_2(\mu_W)$ gibt mit $H \notin lb\mathcal{P}$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass jedes nichtnegative lokale Martingal ein Supermartingal ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie:

1. $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ ist stochastische unabhängig von $\mathfrak{F}_t$ für alle $t, h \geq 0$.
2. Durch $L_t = \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds)$ für alle $t \geq 0$ wird ein Martingal definiert.

Hinweis: Sie können hierbei ohne Beweis benutzen, dass $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ eine $N(0, \int_t^{t+h} \sigma^2(s)ds)$-verteilte Zufallsvariable ist. Wie könnte man dies denn beweisen?

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Sei weiter $\theta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int_0^t \theta^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Durch

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}}|_{\mathfrak{F}_t} = L_\theta(t) = \exp(\int_0^t \theta(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\theta$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$ definiert, dass auf jedem $\mathfrak{F}_t$ äquivalent ist zu $\mathbb{P}$.

Zeigen Sie, dass durch $\bar{W}(t) = W(t) - \int_0^t \theta(s)ds$ ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_\theta$ definiert wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\bar{W}$ die definierenden Eigenschaften eines Wiener-Prozesses bezüglich $\mathbb{P}_\theta$ erfüllt. Für den Nachweis der Normalverteilung ist es sinnvoll die momenterzeugende Funktion zu berechnen.

Abgabe: Die. 16.04.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135