Seminarvortrag:
The Core - Der Kern eines Koalitionsspiels

Helena Wierach

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Bisher haben wir unter den strategischen Spielen nur die nicht-kooperativen Spiele betrachtet. Im Fokus standen die einzelnen Spieler und die von ihnen gewählten Aktionen/Strategien. Entsprechend waren die Spiellösungen hier stets Profile von Aktionen bzw. Strategien. Nun wollen wir kooperative Spiele betrachten, die Koalitionsspiele. Wie der Name schon verrät, kooperieren hier die Spieler. Sie schließend sich zu sogenannten Koalitionen zusammen, um so den für sie erreichbaren Nutzen zu erhöhen. Somit gibt es hier also keine Aktionen bzw. Strategien wie bisher. Im Vordergrund stehen die Spieler-Koalitionen und die von diesen erreichbaren Nutzen. Wir werden annehmen, dass der maximale Nutzen im gesamten Spiel erreicht wird, wenn alle Spieler zusammen arbeiten, d.h. wenn sich die Koalition aller Spieler bildet. Spiellösungen sind daher immer Aufteilungen dieses Gesamtnutzens unter allen Spielern. Uns interessiert nun die Frage, wann eine solche Spiellösung stabil ist. Bei den nicht-kooperativen Spielen haben wir bereits Stabilitätszustände von Spiellösungen kennengelernt: die Nash-Gleichgewichte. Ein Analogon zu diesen bilden bei Koalitionsspielen die Spiellösungen des sogenannten Kerns. Der Kern besteht aus Spiellösungen, die in dem Sinne stabil sind, dass kein einzelner Spieler und auch keine Spieler-Koalition einen Anreiz hat, die Koalition aller Spieler zu verlassen. Im Folgenden werden wir zunächst den Kern definieren und dann Bedingungen analysieren, unter denen der Kern als Menge stabiler Spiellösungen nicht leer ist. Anschließend werden wir dieses Konzept auf das Modell einer Marktwirtschaft übertragen.

2 Koalitionsspiele mit transferierbarem Nutzen

2.1 Definition

Ein **Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen** ist ein Tupel $\langle N, v\rangle$ bestehend aus

- einer endlichen Menge N (Spielermenge)
- einer Funktion $v : \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$, die jeder nichtleeren Teilmenge $S \subseteq N$ (einer **Koalition**) eine reelle Zahl $v(S)$ (den **Nutzen** der Koalition S) zuordnet.

Für jede Koalition S ist $v(S)$ der Nutzen, den die Koalition S erreichen und dann unter ihren Mitgliedern aufteilen kann. Wie diese Aufteilung dann konkret aussieht, ist nicht vorgegeben. Wir treffen die wichtige Annahme , dass der Nutzen der großen Koalition N aller Spieler, der Gesamtnutzen, mindestens so groß ist wie die Summe der Koalitionsnutzen einer beliebigen Partition von N , d.h.

$$v(N) \geq \sum_{i=1}^{k} v(S_i)$$

für jede beliebige Partition $\{S_{1,\cdots,}S_k\}$ von N. Diese Bedingung stellt sicher, dass es unter dem Aspekt der Nutzen-Maximierung optimal ist, dass sich die große Koalition N aller Spieler bildet. Ein Koalitionsspiel, das dieser Bedingung genügt, heißt **kohäsiv**(zusammenhaltend).

Fortan bezeichne $\mathcal{C}$ die Menge aller Koalitionen, d.h. $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{N}) \setminus \{\emptyset\}$.

2.2 WG-Beipiel

Michael, Benjamin und Julian wohnen jeweils allein und überlegen, in eine WG zusammen zu ziehen. Sie haben verschiedene Möglichkeiten: 1. Alle drei ziehen in eine Wohnung, 2. nur zwei ziehen zusammen, oder 3. jeder wohnt weiterhin in seinem Einzelappartment. Michael zahlt zur Zeit 200 , Benjamin zahlt 170 und Julian 180 . Eine 3-Zimmer-Wohnung in Münster kostet eine Wa [illegible] Wohnung kostet dort 330 .

	Michael	Benjamin	Julian
1er Appartment	200 €	170 €	180 €
2er Appartment	je zwei zahlen 330€		
3er Appartment	450 €		

Abbildung 1: Eckdaten WG-Beipiel

Diese Situation wollen wir als Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen modellieren. Die Spielermenge ist $N = \{\text{Michael}(M), \text{Benjamin}(B), \text{Julian}(J)\}$.
Der Nutzen einer beliebigen Koalition $S \subseteq N$ ist die Einsparung an Mietkosten, die ihre Mitglieder zusammen machen können, d.h. die Funktion $v : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$v(\{M\}) = v(\{B\}) = v(\{J\}) = 0$$

$$\begin{aligned} v(\{M, B\}) &= 40 \\ v(\{M, J\}) &= 50 \\ v(\{B, J\}) &= 20 \end{aligned}$$

$$v(\{M, B, J\}) = 100 \ .$$

Dieses Koalitionsspiel ist offenbar kohäsiv, da die Summe der Kolalitionsnutzen einer beliebigen Partition den Gesamtnutzen $v(N)$ von 100 nicht übersteigt.

3 Der Kern

Wir haben nun gesehen, dass es unter dem Gesichtspunkt der Nutzen-Maximierung optimal ist, dass sich die große Koalition N aller Spieler herausbildet. Die Lösungen eines Koalitionsspiels sind nun die möglichen Aufteilungen des Gesamtnutzens $v(N)$ unter allen Spielern. Dabei möchte man eine Stabilität in dem Sinne erreichen, dass kein einzelner Spieler, aber auch keine Koalition $S \subset N$ einen Anreiz hat, die große Koalition zu verlassen. Diese Idee wollen wir uns zunächst an dem in 2.2 eingeführten Beispiel vergegenwärtigen.

3.1 Fortsetzung WG-Beipiel

Wir wollen also nun für das vorgestellte Koaltionsspiel die stabilen Spiellösungen bestimmen. Spiellösungen sind hier zunächst einmal die möglichen Aufteilungen des Gesamtnutzens auf alle Spieler, d.h. mögliche Aufteilungen der Gesamt-Mieteinsparung von 100 im

Falle einer 3er-WG. Eine solche Aufteilung wird durch ein Nutzenprofil $x = (x_j)_{j\in N}$ dargestellt, wobei der Nutzen x_j dem Anteil des Spielers $j \in N$ bei dieser konkreten Aufteilung der Gesamt-Ersparnis entspricht. Damit eine Aufteilung des Gesamtnutzens wirtschaftlich (effizient) ist, muss ein entsprechendes Nutzenprofil $x = (x_j)_{j\in N}$ zunächst einmal der folgenden Bedingung genügen:

$$x_M + x_B + x_J = v(N) = 100 \quad \text{(I)}$$

Welchen Bedingungen muss nun eine solche Aufteilung genügen, damit sie in dem Sinne stabil ist, dass kein einzelner Spieler, aber auch keine Koalition von Spielern einen Anreiz hat, die große Koalition zu verlassen?

Zunächst einmal gilt für jeden einzelnen Spieler: Wenn er in seinem Einzelappartment wohnen bleibt, hat er eine Ersparnis von 0 . Damit eine Aufteilung stabil ist, muss also der Anteil eines jeden Spielers an der Gesamtersparnis mindestens 0 betragen, sonst lohnt sich das Zusammenziehen für ihn nicht. Ein stabiles Nutzenprofil $x = (x_j)_{j\in N}$ genügt also der Bedingung:

$$\forall j \in N : v(\{j\}) \le x_j \Leftrightarrow x_M, x_B, x_J \ge 0 \quad \text{(II)}$$

Auch keine andere nicht-große Koalition soll einen Anreiz haben, die große Koalition zu verlassen: Damit tatsächlich alle drei zusammenziehen, muss für jede Zweier-Koalition die Summe der Ersparnisse ihrer Mitglieder mindestens so groß sein wie die Ersparnis, wenn nur diese beiden Spieler zusammenziehen. Also muss ein stabiles Nutzenprofil $x = (x_j)_{j\in N}$ auch den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{rcccl} x_M + x_B & \ge & v(\{M,B\}) & = & 40 \\ x_M + x_J & \ge & v(\{M,J\}) & = & 50 \qquad \text{(III)} \\ x_B + x_J & \ge & v(\{B,J\}) & = & 20 \end{array}$$

Die stabilen Spiellösungen unseres Koalitionsspiels sind also genau diejenigen Nutzenprofile $x = (x_j)_{j\in N}$, die den Bedingungen (I) bis (III) genügen. Wir wollen nun dieses System von Ungleichungen lösen:
Wir lösen dazu zunächst (I) nach x_M auf:

$$x_M = 100 - (x_B + x_J)$$

Wegen (III) ergibt sich dann in Kombination mit (II):

$$0 \le x_M \le 80$$

Analog erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \le & x_B \le 50 \\ 0 & \le & x_J \le 60 \end{array}$$

Damit erhalten wir als Menge stabiler Spiellösungen unseres Koaltionsspiels die Menge $\left\{x \in [0,80] \times [0,50] \times [0,60] \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = 100\right\}$.

Was zeigt uns nun diese Menge von Nutzenprofilen?

Zunächst einmal ist nicht jedes Nutzenprofil im Kern für jeden Spieler optimal in dem Sinne, dass er durch die so gewählte Aufteilung des Gesamtnutzens seinen eigenen Nutzen maximiert. Beipielsweise ist das Nutzenprofil $(0, 40, 60)$ zwar im Kern des obigen Spiels, jedoch ist diese Aufteilung der Gesamt-Mieteinsparung für Michael sicherlich nicht optimal, denn seine eigene Ersparnis beträgt in diesem Fall 0. Für ihn gibt es durchaus Möglichkeiten, sich in einer Zweier-Koalition besser zu stellen. Allerdings wird er weder Benjamin noch Julian davon überzeugen können, mit ihm eine solche Zweier-WG zu gründen und sich so von der großen Koalition zu lösen. Denn zusammen mit Benjamin könnte Michael in einer Zweier-WG maximal 40 einsparen, sodass sich nicht beide gleichzeitig verbessern könnten. Deshalb wird diese Zweier-Koalition nicht zustande kommen. Auch die Zweier-WG mit Julian kommt nicht zustande. Denn Julian bekommt zur Zeit 60 , könnte aber mit Michael zusammen nur maximal 50 einsparen, sodass er sich auf jeden Fall finanziell schlechter stellen würde. Da Michael sich auch nicht besser stellen kann, wenn er alleine wohnen bleibt, löst auch er sich nicht von der großen Koalition. Somit ist das Nutzenprofil $(0, 40, 60)$ zwar nicht für alle Spieler optimal, aber dennoch stabil insofern, als dass weder eine Einzelperson noch eine Koalition die große Koalition verlassen wird.

Diese Idee einer Stabilität von Spiellösungen wird nun durch das Konzept des Kerns aufgegriffen.
Der Kerns bildet damit ein Analogon zum Nash-Gleichgewicht bei nicht-kooperativen Spielen. Dort war eine Spiellösung ist stabil, wenn niemand profitabel abweichen kann. Hier ist nun eine Spiellösung stabil, wenn keine Koalition profitabel abweichen kann, d.h. wenn keine Koaltion durch Abweichen von der großen Koalition ein besseres Ergebnis für all ihre Mitglieder erreichen kann. Dies wollen wir formal festhalten.

3.2 Notation

Sei $\langle N, v\rangle$ ein Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen.
Ein **Nutzenprofil** ist ein Vektor $x = (x_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^{|N|}$, der jedem Spieler $i \in N$ einen Nutzen x_i zuweist. Ein Nutzenprofil $x = (x_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^{|N|}$mit $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ heißt **effizient**.

3.3 Definition

Der **Kern** eines Koalitionsspiels mit transferierbarem Nutzen $\langle N, v\rangle$ ist die Menge derjenigen effizienten Nutzenprofile $(x_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^{|N|}$, sodass für jede Koalition S gilt: $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$.

Die Elemente des Kerns genügen also den folgenden Bedingungen:

- Effizienz:
  Jedes Element des Kerns schöpft den Gesamtnutzen der Koalition aller Spieler $v(N)$ vollständig aus.

- Anreizkompatibilität:
  Jedes Element des Kerns teilt jedem Spieler bzw. jeder Koalition von Spielern mindestens den Betrag zu, der seinem bzw. ihrem Koalitionswert entspricht.

Damit versprechen die Elemente des Kerns eine Stabilität der Spiellösung. Denn wenn alle Spieler übereinstimmend eine durch ein Element des Kerns dargestellte Aufteilung des Gesamtnutzens gewählt haben, so hat weder ein einzelner Spieler noch eine Koalition von Spielern einen Anreiz, die große Koalition zu verlassen.

3.4 Nicht-Leere des Kerns

Wir wollen im Folgenden näher untersuchen, unter welchen Bedingungen der Kern eines Koalitionsspiels nicht leer ist.

3.4.1 Notation/Definition

- Für eine beliebige Koalition $S \in \mathcal{C}$ bezeichne $1_S \in \mathbb{R}^{|N|}$ den **charakteristischen Vektor** zu S, gegeben durch

$$(1_S)_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in S \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ein Tupel $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$von Gewichten (Zahlen) aus $[0,1]$ heißt **ausgeglichen**, falls für jeden Spieler $i \in N$ die Summe der λ_S über alle Koalitionen, die i enthalten, gleich 1 ist, d.h.

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot 1_S = 1_N$$

- Ein Koalitionsspiel $\langle N, v\rangle$ heißt **ausgeglichen**, falls für jedes ausgeglichene Tupel von Gewichten gilt:

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) \leq v(N)$$

Der Begriff eines ausgeglichenen Koalitionsspiels lässt sich wie folgt interpretieren:
Jedem Spieler steht genau eine Zeiteinheit zur Verfügung, die er auf alle Koalitionen, zu denen er gehört, aufteilen muss. Damit nun eine Koalition S für den Zeitabschnitt λ_S aktiv sein kann, müssen all ihre Mitglieder für diesen Zeitabschnitt in S aktiv sein. In diesem Fall erzielt dann die Koalition S den Nutzen $\lambda_S \cdot v(S)$. Die Ausgeglichenheit des Tupels von Gewichten entspricht somit der Zulässigkeit der Zeiteinteilungen der Spieler. Ein Spiel ist nun ausgeglichen, falls es keine zulässige Zeiteinteilung gibt, durch die die Spieler einen höheren Gesamtwert als $v(N)$ erreichen können.

3.4.2 Satz (Bondareva-Shapley)

Ein Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen hat genau dann einen nichtleeren Kern, wenn es ausgeglichen ist.

Beweisskizze:
Sei $\langle N, v\rangle$ ein Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen.
Für ein beliebiges Nutzenprofil $x = (x_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^{|N|}$ und beliebige Koalition $S \in \mathcal{C}$ setze $x(S) := \sum_{i\in S} x_i$.

" $\Rightarrow$ " :
Sei x ein Nutzenprofil im Kern von $\langle N, v\rangle$ und sei $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ ein beliebiges ausgeglichenes Tupel von Gewichten. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) &\leq \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot x(S) \\
&= \sum_{S\in\mathcal{C}} \left(\lambda_S \cdot \sum_{i\in S} x_i\right) \\
&= \sum_{i\in N} \sum_{\{S:i\in S\}} \lambda_S \cdot x_i \\
&= \sum_{i\in N} x_i \cdot \sum_{\{S:i\in S\}} \lambda_S \\
&= \sum_{i\in N} x_i \\
&= x(N) \\
&= v(N)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle N, v\rangle$ ist ausgeglichen
" $\Leftarrow$ " :
Sei nun $\langle N, v\rangle$ ausgeglichen. Dann existiert kein ausgeglichenes Tupel von Gewichten $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$, sodass $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) > v(N)$.
Betrachte nun die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
A &:= \left\{(1_N, v(N)+\epsilon) \in \mathbb{R}^{|N|+1} : \epsilon > 0\right\} \\
K &:= \left\{y \in \mathbb{R}^{|N|+1} : y = \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot (1_S, v(S)) \text{ mit } \lambda_S \geq 0 \forall S \in \mathcal{C}\right\}
\end{aligned}$$

Man zeigt zunächst:

- A ist konvex
- K ist ein konvexer Kegel
- $A \cap K = \emptyset$

Da also A und K disjunkte konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^{|N|+1}$ sind existiert gemäß dem Theorem über trennende Hyperebenen ein Vektor $0 \neq (\alpha_N, \alpha) \in \mathbb{R}^{|N|+1}$ mit

$$(\alpha_N, \alpha) \cdot y \geq 0 > (\alpha_N, \alpha) \cdot (1_N, v(N)+\epsilon) \;\; \forall y \in K, \; \forall \epsilon > 0 \tag{1}$$

Nun ist $(1_N, v(N)) \in K$ (wähle $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ mit $\lambda_N = 1$und $\lambda_S = 0$für alle $S \neq N$) und es gilt mit 1 für ein beliebiges $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_N, \alpha) \cdot (1_N, v(N)) > (\alpha_N, \alpha) \cdot (1_N, v(N)+\epsilon) \\
\Leftrightarrow\; & \textstyle\sum_{i\in N} \alpha_N^{(i)} + \alpha v(N) > \sum_{i\in N} \alpha_N^{(i)} + \alpha(v(N)+\epsilon) \\
\Leftrightarrow\; & \alpha v(N) > \alpha(v(N)+\epsilon) \\
\Leftrightarrow\; & 0 > \alpha\epsilon \\
\Leftrightarrow\; & 0 > \alpha
\end{aligned}$$

Setze nun $x := \frac{1}{(-\alpha)} \cdot \alpha_N$.
Für beliebiges $S \in \mathcal{C}$ ist $(1_S, v(S)) \in K$ (wähle für $\tilde{S} \in \mathcal{C}$ $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ mit $\lambda_{\tilde{S}} = 1$ und $\lambda_S = 0$ $\forall S \neq \tilde{S}$).
Dann folgt aus der linken Ungleichung in 1 für alle $S \in \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & (\alpha_N, \alpha) \cdot (1_S, v(S)) & \geq & 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i\in S} \alpha_N^{(i)} + \alpha v(S) & \geq & 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i\in S} \alpha_N^{(i)} & \geq & -\alpha v(S) \\
\Leftrightarrow & \sum_{i\in S} \frac{1}{-\alpha} \cdot \alpha_N^{(i)} & \geq & v(S) \\
\Leftrightarrow & \sum_{i\in S} x_i & \geq & v(S) \\
\Leftrightarrow & x(S) & \geq & v(S)
\end{array}$$

Ferner folgt aus der rechten Ungleichung in 1 für alle $\epsilon > 0$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & 0 & > & (\alpha_N, \alpha) \cdot (1_N, v(N) + \epsilon) \\
\Leftrightarrow & 0 & > & \sum_{i\in N} \alpha_N^{(i)} + \alpha (v(N) + \epsilon) \\
\Leftrightarrow & -\alpha (v(N) + \epsilon) & > & \sum_{i\in N} \alpha_N^{(i)} \\
\Leftrightarrow & v(N) + \epsilon & > & \sum_{i\in N} \frac{1}{-\alpha} \alpha_N^{(i)} \\
\Leftrightarrow & v(N) + \epsilon & > & x(N)
\end{array}$$

$\Rightarrow v(N) \geq x(N)$
Andererseits wissen wir bereits, dass gilt: $x(S) \geq v(S)$ für alle $S \in \mathcal{C}$, also insbesondere $x(N) \geq v(N)$.
$\Rightarrow x(N) = v(N)$
$\Rightarrow x$ ist im Kern
$\Rightarrow$Kern $\neq \emptyset$. $\square$

3.4.3 Fortsetzung WG-Beispiel

In 3.1 haben wir gesehen, dass der Kern des Koalitionsspiels aus unserem WG-Beispiel nicht leer ist. Nach Satz 3.4.2 muss also dieses Koalitionsspiel ausgeglichen sein. Dies sieht man wie folgt ein:
Sei $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ ein beliebiges ausgeglichenes Tupel von Gewichten. Zu zeigen ist: $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) \leq v(N)$.
Da $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ ausgeglichenes Tupel von Gewichten ist, gilt: $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot 1_S = 1_N$.
Hieraus folgt:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D.h. $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ löst das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \tag{2}$$

Nehmen wir nun an, es gilt: $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) > v(N)$.
Dann gilt:

$$\begin{array}{rcrl} & \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot 40 + \lambda_5 \cdot 50 + \lambda_6 \cdot 20 + \lambda_7 \cdot 100 & > & 100 \\ \Leftrightarrow & 0,4 \cdot \lambda_4 + 0,5 \cdot \lambda_5 + 0,2 \cdot \lambda_6 + \lambda_7 & > & 1 \end{array} \tag{3}$$

Da das lineare Gleichungssystem (2) unter der Nebenbedingung (3) nicht lösbar ist, muss die Annahme falsch sein und es folgt: $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) \leq v(N)$. Also ist das Koalitionsspiel ausgeglichen.

4 Märkte mit transferierbarem Nutzen

Wir wollen nun das Konzept des Kerns auf ein klassisches Modell einer Marktwirtschaft anwenden. Jeder Agent in dieser Marktwirtschaft ist mit einem Güter-Bündel ausgestattet. Diese Güter dienen als Input für einen Produktionsprozess, den der Agent auslösen kann. Alle Produktionsprozesse erzeugen denselben Output, welcher dann zwischen den Agenten gehandelt werden kann. Der einheitliche Output dient somit als eine Art Währung, die den Handel zwischen den Agenten ermöglicht.

4.1 Definition

Ein **Markt mit transferierbarem Nutzen** ist ein Quadrupel $\left\langle N, l, (w_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N} \right\rangle$ bestehend aus

- einer endlichen Menge N (die Menge der Agenten)
- einer natürlichen Zahl $l \in \mathbb{N}$ (die Anzahl der verschiedenen Input-Güter)
- für jeden Agenten $i \in N$ ein Vektor $w_i \in \mathbb{R}^l_+$ (die Ausstattung von Agent i)
- für jeden Agenten $i \in N$ eine stetige, monoton wachsende und konkave Funktion $f_i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$ (die Produktionsfunktion von Agent i), die jedem **Inputvektor** $z \in \mathbb{R}^l_+$ einen **Output** $f_i(z) \in \mathbb{R}_+$ zuordnet.

Ein Profil $(z_i)_{i\in N}$ von Inputvektoren mit $\sum_{i\in N} z_i = \sum_{i\in N} w_i$ heißt **Allokation**.

In solch einem Markt können die Agenten nun von Kooperationen profitieren: sind ihre Ausstattungen komplementär, so müssen sie Input-Güter austauschen, um den Gesamt-Output zu maximieren. Was jedoch die Aufteilung des Gesamt-Outputs betrifft, so kollidieren die Interessen der Agenten. Um diese Situation nun spieltheoretisch analysieren zu können, modellieren wir einen Markt mit transferierbarem Nutzen als Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen.
Für einen Markt mit transferierbarem Nutzen $\left\langle N, l, (w_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N} \right\rangle$ definieren wir das entsprechende Koalitionsspiel $\langle N, v\rangle$, wobei

- die Spielermenge N die Menge der Agenten ist und

- die Funktion $v : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$v(S) := \max{}_{(z_i)_{i\in S}} \left\{ \sum_{i\in S} f_i(z_i) : z_i \in \mathbb{R}_+^l \forall i \in S \text{ und } \sum_{i\in S} z_i = \sum_{i\in S} w_i \right\} \tag{4}$$

  für beliebiges $S \in \mathcal{C}$.

Damit ist $v(S)$ der maximale Output, den die Koalition S allein erzeugen kann.

Den Kern eines Marktes definieren wir als den Kern des zugehörigen Koalitionsspiels. Der Kern ist hier also eine Menge von Nutzenprofilen $(x_i)_{i\in N}$, die den maximalen Gesamt-Output $v(N)$ der Marktwirtschaft unter allen Agenten aufteilen. Eine solche Aufteilung wird dabei als stabil betrachtet, wenn keine Koalition $S \subseteq N$ einen Output $v(S)$ erreichen kann, der - aufgeteilt unter den Agenten in S - jedem Agenten in S einen größeren Anteil zusichert.

Im Folgenden werden wir Satz 3.4.2 benutzen, um zu zeigen, dass jeder Markt mit transferierbarem Nutzen einen nichtleeren Kern besitzt.

4.2 Satz

Jeder Markt mit transferierbarem Nutzen hat einen nichtleeren Kern.

Beweis:
Sei $\left\langle N, l, (w_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N} \right\rangle$ ein Markt mit transferierbarem Nutzen und $\langle N, v\rangle$ das entsprechende Koalitionsspiel (wie oben definiert).
Nach Satz 3.4.2 genügt es zu zeigen, dass $\langle N, v\rangle$ ausgeglichen ist.
Sei also $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$ eine beliebiges ausgeglichenes Tupel von Gewichten.
Zu zeigen ist dann: $\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v(S) \leq v(N)$.
Für jede Koalition $S \in \mathcal{C}$ sei nun $\left(z_i^S\right)_{i\in S}$ eine Lösung des Maximierungsproblems in (4) , das $v(S)$ definiert.
Für jedes $i \in N$ setze $z_i^\star := \sum_{\{S\in\mathcal{C}: i\in S\}} \lambda_S \cdot z_i^S \in \mathbb{R}_+^l$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i\in N} z_i^\star &= \textstyle\sum_{i\in N} \sum_{\{S\in\mathcal{C}: i\in S\}} \lambda_S \cdot z_i^S \\
&= \textstyle\sum_{S\in\mathcal{C}} \sum_{i\in S} \lambda_S \cdot z_i^S \\
&= \textstyle\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot \left(\sum_{i\in S} z_i^S\right) \\
&= \textstyle\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot \left(\sum_{i\in S} w_i\right) \\
&= \textstyle\sum_{i\in N} \left(\sum_{\{S\in\mathcal{C}: i\in S\}} \lambda_S\right) \cdot w_i \\
&= \textstyle\sum_{i\in N} w_i
\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
v(N) &= \max{}_{(z_i)_{i\in N}} \left\{\textstyle\sum_{i\in N} f_i(z_i) : z_i \in \mathbb{R}_+^l \forall i \in N \text{ und } \sum_{i\in N} z_i = \sum_{i\in N} w_i\right\} \\
&\geq \textstyle\sum_{i\in N} f_i(z_i^\star)
\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} f_i\left(z_i^\star\right) &= \sum_{i\in N} f_i\left(\sum_{\{S\in\mathcal{C}:i\in S\}} \lambda_S \cdot z_i^S\right)\\
&\geq \sum_{i\in N} \sum_{\{S\in\mathcal{C}:i\in S\}} \lambda_S \cdot f_i\left(z_i^S\right)\\
&= \sum_{S\in\mathcal{C}} \sum_{i\in S} \lambda_S \cdot f_i\left(z_i^S\right)\\
&= \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot \left(\sum_{i\in S} f_i\left(z_i^S\right)\right)\\
&= \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v\left(S\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow v\left(N\right) \geq \sum_{i\in N} f_i\left(z_i^\star\right) \geq \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \cdot v\left(S\right)$
$\Rightarrow \langle N, v\rangle$ ist ausgeglichenes Koalitionsspiel. $\square$

5 Fazit

Der Kern eines Koalitionsspiels ist ein wichtiges Konzept zur Bestimmung kooperativer Konfliktlösungen. In Koalitionsspielen mit transferierbarem Nutzen ist der Kern gerade die Menge der Nutzenprofile, die den Gesamtwert der großen Koalition so auf alle Spieler verteilen, dass kein einzelner Spieler, aber auch keine Spielerkoalition einen Anreiz hat, sich von der großen Koalition abzusondern. Insofern ist ein Nutzenprofil im Kern nicht notwendigerweise für jeden Spieler optimal (im Sinne von "Nutzen-maximierend"), jedoch ist die dadurch gefundene Spiellösung stabil, da keine Koalition profitabel abweichen kann. Ein Nachteil des Lösungskonzepts des Kerns besteht darin, dass die Bedingungen des Kerns für ein Koalitionsspiel so restriktiv sein können, dass der Kern des Spiels leer ist. Also sichert der Kern nicht unbedingt für jedes Koalitionsspiel eine stabile Spiellösung. Wir haben gesehen, dass der Kern eines Marktes mit transferierbarem Nutzen stets nicht leer ist. Darüber hinaus kann man zeigen, dass es einen Zusammenhang zwischen den Kernelementen und den Wettbewerbsgleichgewichten eines Marktes gibt. Es zeigt sich, dass die durch die Wettbewerbsgleichgewichte eines Marktes erzeugten Nutzenprofile stets im Kern dieses Marktes liegen. Darüber hinaus kann der Kern viele weitere Nutzenprofile enthalten, die unter Umständen stark von den Wettbewerbsgleichgewichten abweichen. Man kann allerdings zeigen, dass mit wachsender Anzahl an Agenten in einem Markt der Kern auf die Menge der Gleichgewichts-Nutzenprofile zusammenschrumpft. Anders ausgedrückt sind in einer ausreichend großen Wirtschaft die einzigen stabilen Zustände, die immun gegenüber Abweichungen durch Untergruppen sind, die Zustände der Wettbewerbsgleichgewichte.