Einführung in die Spieltheorie und Nash-Gleichgewichte

Vortrag

im Seminar WT und Ihre Anwendungen

Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfählische Wilhelms-Universtät Münster

vorgelegt von

Josef Üre

Münster, den 08.Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Spieltheorie

1.1 Einleitung

Dieser Seminarvortrag gliedert sich in 2 Teile. Zum einem wird vorab eine kurze Einführung in die Spieltheorie gegeben, um die allgemeinen Konzepte der Spieltheorie kennenzulernen. Unser Hauptaugenmerk wird allerdings im 2.Teil des Vortrags liegen.
Hier werden wir uns hauptsächlich mit Nash-Gleichgewichten bei strategischen Spielen beschäftigen.

1.2 Was ist überhaupt Spieltheorie ?

Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.
Das Ziel dieser Theorie ist eine Entscheidungshilfe zu geben, um Konfliktsituationen zu vermeiden. Dabei ist die Hauptannahme, der die Theorie unterliegt, dass jeder Spieler sich "rational" verhält, d.h sein Nutzen maximiert, wobei man davon ausgehen kann, dass die Mitspieler ebenso "rational" handeln.

1.3 Arten von Spiele in der Spieltheorie

Zu den Arten von Spielen in der Spieltheorie gehören die **strategischen Spiele**(Normalform-Spiele; nach von Neuman und Morgenstern (1944)), wobei die Entscheidungen der Spieler von Beginn des Spiels festgelegt werden und das Spielergebnis aus der Stratgiekombination resultiert.

Daneben gibt es noch die **extensiven Spiele** mit **vollkommenen** und **unvollkommenen** Informationen. Hierzu gehören Spiele mit mehreren Zügen, wie etwa Schach. Diese Spielartenfasst man auch als nicht-kooperative Spiele zusammen. Neben den nicht-kooperativen Spiele gibt es noch die kooperativen Spiele. Diese werden auch **Gemeinsame Spiele** genannt.
Bei **Gemeinsamen Spiele** wird gemeinsam versucht das Gesamtnutzen aller zu optimieren.

Die wichtigsten **Lösungskonzepte** der Spieltheorie sind die Nash-Gleichgewichte, Elimination dominierter Strategien und weitere Gleichgewichtsbegriffe.

I Spiele in strategischer Form

Von nun an betrachten wir Modelle von strategischen Interaktionen, die als strategische Spiele bekannt sind. Nach von Neumann und Morgenstern (1944) sind das " Spiele in Normalform ".

2 Nash-Gleichgewichte

2.1 Definition: (Präferenzrelation)

Eine Relation $\succeq$ auf M heisst Präferenzrelation, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität:
  Für alle $a \in A$ gilt $a \succeq a$
- Volständigkeit:
  Für $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt $a \succeq b$ oder $b \succeq a$
- Transitivität:
  Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \succeq b$ und $b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$

2.2 Definition: (Strategisches Spiel)

Unter einem strategischen Spiel Γ versteht man ein Tripel $\langle N, (A_1, \ldots, A_n), (\succeq_1, \ldots, \succeq_n) \rangle$ mit folgender Bedeutung :

1. $N = \{1, \ldots, n\}$ ist eine endliche Spielermenge.
2. Jedem Spieler i ist die nichtleere Menge A_i zugeordnet; jedes Element $a_i \in A_i$ wird Entscheidung oder Strategie des Spielers i und A_i seine Strategiemenge genannt.
   $A = \prod_{i \in N} A_i$ heisst Strategiemenge der n Spieler.
3. $\succeq_i$ ist eine Präferenzrelation des Spielers i

Das Spiel Γ heisst endlich, falls die Menge A_i $\forall i$ endlich ist.
Oft wird auch statt einer Präferenzrelation $\succeq_i$ eine Auszahlungsfunktion $u_i : A \to \mathbb{R}$ für Spieler i genutzt; dass heisst

$$a \succeq_i b \Leftrightarrow u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele mit Auszahlungsfunktionen werden oft in **Matrixform** angegeben,wie etwa das folgende Beispiel.

Beispiel:

Das Spiel besteht aus 2 Spielern mit jeweils 2 Strategien (Entscheidungen), d.h. $|N| = 2$ und $A_1 = \{T, B\}, A_2 = \{L, R\}$.

$1 \setminus 2$	L	R
T	w_1, w_2	x_1, x_2
B	y_1, y_2	z_1, z_2

Wählt Spieler 1 nun Strategie T und Spieler 2 gleichzeitig Strategie R, so hat Spieler 1 eine Auszahlung von x_1 und Spieler 2 x_2.

Wichtig: Entscheidungen der Spieler werden unabhänging voneinander gemacht, d.h. jeder Spieler trifft seine Wahl ohne informiert zu sein wie die Auswahl der anderen Spieler war.

Notation

Sei $a = (a_i)_{i \in N}$ ein Strategieprofil ($a \in A = \prod_{i \in N} A_i$). Dann ist $a-_i := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ und $(a-_i, a_i) = (a_j)_{j \in N} = a$

2.3 Definition: (Nash-Gleichgewichte von strategischen Spielen)

Sei $\Gamma = \langle N, A, \succeq \rangle$ ein strategisches Spiel. Ein Strategieprofil (Strategiekombination der n Spieler) $a^* \in A (= \prod_{i \in N} A_i)$ mit der Eigenschaft, dass für jeden Spieler $i \in N$ gilt :
$a^* = (a^*-_i, a_i^*) \succeq_i (a^*-_i, a_i) \; \forall a_i \in A_i$, nennt man **Nash-Gleichgewichte**

In Worten: Diesem Aktionsprofil möchte kein Spieler entweichen, da jeder einzelne durch Abändern seiner Entscheidung keine Besserung schaffen kann.

Diese Definition liefert keine Methode zum Auffinden eines Nash-Gleichgewichtes. Daher stelle ich alternativ die Definition der Besten-Antwort-Funktion vor, die uns durch ein Algorhitmus, welcher nicht notwenidg effektiv ist, ermöglicht Nash-Gleichgewichte zu finden.

2.3.1 Definition: (Beste-Antwort-Funktion)

Sei $a-_i \in A-_i$ gegeben. (Entscheidung aller, ausser i).
Sei $B_i(a-_i) := \{a_i \in A_i : (a-_i, a_i) \succeq_i (a-_i, \bar{a_i}) \; \forall \bar{a_i} \in A_i\}$. Wir nennen die mengenwertige Funktion die **Beste-Antwort-Funktion**.

2.3.2 Bemerkung:

Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategieprofil $a^* \in A$, der die folgende Bedingung erfüllt: $a_i^* \in B_i(a^*-_i) \; \forall i \in N$ (Fixpunkteigenschaft).

Nun folgen 3 Beispiele von vorhandenen(bzw. nichtvorhandenen) Nash-Gleichgewichten bei strategischen Spielen.

2.4 Beispiele:

1. ***Gefangendilemma*** :

   Zwei Diebe, die zusammen ein schweres Verbrechen begangen haben, werden verhaftet und in verschiedene Zellen untergebracht. Beiden werden die folgenden Regeln gestellt: Falls einer von den Gefangenen gesteht, so wird der Andere für das Leugnen für vier Jahre eingesperrt und der Geständige wird freigelassen. Wenn aber beide gestehen, dann kommen beide für drei Jahre ins Gefängnis. Gesteht keiner der beiden, so werden die Gefangene für geringere Vergehen für ein Jahr eingesperrt. Diese Situation kann man in eine Entscheidungsmatrix folgendermaßen aufbereiten:

1 \ 2	Gestehen	Nicht-Gestehen
Gestehen	**-3 , -3**	0 , -4
Nicht-Gestehen	-4 , 0	-1 , -1

In dieser Situation gibt es keine Möglichkeit mit einander zu kooperieren, deswegen ist (Gestehen, Gestehen) die stabile Gleichgewichtslösung. Wenn der Gefangene 2 gesteht und gegen Gefangene 1 aussagt, dann ist es für den Gefangenen 1 auch besser, den Gefangenen 2 zu beschuldigen, als Nicht-Gestehen zu wählen. Kein anderes Strategieprofil ist ein Nash Gleichgewicht, denn z.B.: Bei dem Strategieprofil (Nicht-Gestehen, Nicht-Gestehen) ist die Auszahlung von Gefangenen 1 für das Gestehen größer als für Nicht-Gestehen, wenn der Gefangene 2 sich für Nicht-Gestehen entscheidet.
$u_1(Gestehen, Nicht-Gestehen) \geq u_1(Nicht-Gestehen, Nicht-Gestehen)$.
So sehen z.B. die Auszahlungen den Gefangenen 1 aus: (analog für den Gefangenen 2):
$u_1(Gestehen, Nicht-Gestehen) > u_1(Nicht-Gestehen, Nicht-Gestehen)$
$>> u_1(Gestehen, Gestehen) > u_1(Nicht-Gestehen, Gestehen)$.

2. ***Bach or Stravinsky*** :

Zwei Freundinnen wünschen sich auf ein Konzert zu gehen. Freundin 1 würde lieber die Musik von "Bach" hören und Freundin 2 lieber von "Stravinsky". Für die Entscheidungssituation lässt sich in der Auszahlungsmatrix folgendermaßen darstellen:

1 \ 2	Bach	Stravinsky
Bach	**2 , 1**	0 , 0
Stravinsky	0 , 0	**1 , 2**

Im Fall von zwei Freundinnen gibt es zwei Nash-Gleichgewichte: sowohl "Bach, Bach" als auch "Strawinsky, Strawinsky" sind wechselseitige beste Antworten. Die Strategieprofiele wie ("Bach, Stravinsky") bzw. ("Stavinsky, Bach") werden nicht analysiert, da sie von beiden Freundinen vermieden werden. Wenn beispielsweise Freundin 1 "Bach" wählt und Freundin 2 "Bach" wählt, so ist die Auszahlung für die Freundin 1 zwei, und für Freundin 2 eins. Wenn die Freundin 2 "Stravinsky" wählt, so beträgt die Auszahlung null. Im Falle, dass z.B. Freundin 1 als erste entscheiden kann, haben die Freundinnen die beste Entscheidung getroffen, wenn sie (Bach, Bach) wählen.

3. ***Matching Pennies*** :

Bei diesem Spiel machen zwei Freunde eine Wette, indem sie jeder gleichzeitig eine faire Münze werfen. Dabei haben sie vorher folgende Regeln festgesetzt: Falls beim Wurf die gleiche Seite fällt, so erhält Spieler 1 einen Euro von Spieler 2.
Falls aber verschidene Seiten fallen, so erhält Spieler 2 einen Euro von Spieler 1.
Dabei ensteht folgende Auszahlungsmatrix:

1 \ 2	Kopf	Zahl
Kopf	1,-1	-1,1
Zahl	-1,1	1,-1

Bei diesem Spiel existieren nur Zustände (Spielerprofile), die durch Abändern der einzelnen Entscheidung zur Verbesserung des Ausgangs des jeweiligen Spielers führen. Von daher existieren keine Zustände, welches ein Nash-Gleichgewicht sein kann.

Nash-Gleichgewichte sind nicht immer eindeutig(Bsp.: 2.3.2) und sie müssen noch nicht einmal existieren(Bsp.: 2.3.3) Im folgenden möchten wir uns damit auseindersetzen, unter welchen Bedingungen die Existenz von Nash-Gleichgewichten gewährleistet ist. Dazu zunächst das folgende Lemma, was wir hier nicht beweisen werden.

2.5 Lemma: (Kakutani‘s Fixpunktsatz)

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ kompakte, konvexe Teilmenge und $f : X \to X$ eine mengenwertige Funktion für die folgendes gilt:

i. $\forall x \in X$ ist $f(x)$ eine nichtleere und konvexe Menge

ii. der Graph von f ist abgeschlossen (d.h. für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in f(x_n)$ $\forall n$, $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$ folgt $y \in f(x)$)

Dann existiert ein $x^* \in X$ mit $x^* \in f(x^*)$

Beweis:
Ein Beweis dieses Satzes ist in H. Heuser (2004): "Lehrbuch der Analysis“, Teubner, S. 614-616 zu finden.

□

2.6 Definition: (Stetigkeit einer Präferenzrelation)

Eine Präferenzrelation $\succeq$ auf A heisst stetig , wenn für jedes Paar konvergenter Folgen $(a_k)_k \to a$ und $(b_k)_k \to b$ mit $a_k \succeq b_k \forall k$ gilt, dass $a \succeq b$.

2.7 Definition: (Quasikonkavität einer Präferenzrelation)

Eine Präferenzrelation $\succeq$ auf $\mathbb{R}^n$ heisst quasi-konkav, falls für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die Menge $\{a \in \mathbb{R}^n : a \succeq b\}$ konvex ist.

2.8 Proposition: (Existenz von Nash-Gleichgewichten)

Ein strategisches Spiel $\Gamma = \langle N, A, \succeq \rangle$ hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht, falls $\forall i \in N$ folgendes gilt:

i. die Strategiemenge (Entscheidungsmenge) A_i von Spieler i ist
   - nichtleere, kompakt und konvexe Teilmenge von einem euklidischen Raum

ii. die Präferenzrelation $\succeq_i$ ist stetig und quasi-konkav über A_i

Beweis:
Definiere $B : A \to A$ mit $B(a) = \bigotimes_{i\in N} B_i(a-_i)$ (siehe: Def.2.2.1).
Für jedes $i \in N$ ist $B_i(a-_i) \neq \emptyset$, da die Präferenzrelation $\succeq_i$ stetig und die Menge A_i kompakt ist.
Auch gilt, dass $B_i(a-_i)$ konvex ist, da $\succeq_i$ quasi-konkav über A_i.
Der Graph von $B : A \to A$ ist abgeschlossen, da $\succeq_i$ stetig und A kompakt ist.
Dann folgt mit Kakutani´s Fixpunktsatz: $B : A \to A$ hat einen Fixpunkt.
Fixpunkte von Beste-Antwort-Funktionen $B : A \to A$ sind Nash-Gleichgewichte.

□

Im Allgemeinen kann man nicht viel über die Menge von Nash-Gleichgewichten sagen. Eigentlich können nur in einer begrenzten Anzahl von Klassen Aussagen über die Qualität des Gleichgewichtes getätigt werden. Dazu betrachten wir eine spezielle Klasse von Spielen.

2.9 Definition: (Strikt kompetitive Spiele)

Ein strategisches Spiel $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (\succeq_i) \rangle$ ist strikt kompetitiv, falls für jedes $a \in A$ und $b \in A$ gilt : $a \succeq_1 b$ und $b \succeq_2 a$. Hier stehen also die Spieler in direkter Konkurrenz.
Solche Spiele werden auch "Nullsummenspiele" genannt, falls anstatt der Präferenzrelationen die Auszahlungsfunktionen u_1 und u_2 mit der Eigenschaft $u_1 + u_2 = 0$ angegeben sind.

Als nächstes möchten wir zeigen, wann bei solchen Spielen unter gegebenen Voraussetzungen ein Nash-Gleichgewicht vorhanden ist . Dazu betrachten wir die nächste Definition.

2.10 Defintion: (Maxminimierer)

Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel.
Die Strategie $x^* \in A_1$ ist ein **Maxminimierer (MM) für Spieler 1** , falls

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \ \forall x \in A_1.$$

Analog, die Strategie $y^* \in A_2$ ist ein **Maxminimierer (MM) für Spieler 2** , falls

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \ \forall y \in A_2.$$

2.11 Lemma:

Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel.
Dann gilt $\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$

Beweis:
Für jede reellwertige Funktion f gilt

$$\min_z(-f(z)) = -\max_z(f(z)) \ (*)$$

Damit gilt für alle $y \in A_2$

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x, y) &\overset{(*)}{=} \max_{x \in A_1}(-u_2(x, y)) \\ &= \max_{x \in A_1} u_1(x, y) (**) \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \max_{y \in A_2}(\min_{x \in A_1} u_2(x, y)) &\overset{(*)}{=} -\min_{y \in A_2}(-\min_{x \in A_1} u_2(x, y)) \\ &\overset{(**)}{=} -\min_{y \in A_2}(\max_{x \in A_1} u_1(x, y)) \end{aligned} \tag{2}$$

□

Weiter ist somit $y \in A_2$ Lösung vom Problem $\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y)$ genau dann wenn es Lösung vom Problem $\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$ ist.

Die nächste Proposition gibt uns nun wie bereits angesprochen die Verbindung zwischen den Nash-Gleichgewichten und den strikt kompetitiven strategischen Spielen an.

2.12 Proposition: (Nash-Gleichgewichte und Maxminimierer)

Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann gelten folgende Aussagen:

i. Falls (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann ist x^* ein Maxminimierer für Spieler 1 und y^* ein Maxminimierer für Spieler 2.

ii. Falls (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann gilt $\max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x,y) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y) = u_1(x^*, y^*)$ und von daher haben alle Nash-Gleichgewichte von G diesselben Auszahlungen.

iii. Falls $\max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x,y) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y)$ und x^* ein Maxminimierer für Spieler 1 und y^* ein Maxminimierer für Spieler 2, dann ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G.

Beweis:

i. Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.
$\Rightarrow u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y) \ \forall y \in A_2$
$\Rightarrow u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y) \ \forall y \in A_2$, da $u_2 = -u_1$.
Also

$$u_1(x^*, y^*) = min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \leq max_{x \in A_1} min_{y \in A_2} u_1(x,y) \tag{3}$$

Außerdem gilt nach der Definition des Nash-Gleichgewichtes aus der Perspektive von Spieler 1, dass $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*) \ \forall x \in A_1$, also $u_1(x^*, y^*) \geq min_{y \in A_2} u_1(x,y) \ \forall x \in A_1$

$$\Rightarrow u_1(x^*, y^*) \geq max_{x \in A_1} min_{y \in A_2} u_1(x,y) \tag{4}$$

$\Rightarrow u_1(x^*, y^*) = max_{x \in A_1} min_{y \in A_2} u_1(x,y) (*)$
$\Rightarrow x^*$ ist ein MM für Spieler 1.

Analog kann man zeigen, dass y^* ein MM für Spieler 2 ist:

$$u_2(x^*, y^*) = max_{y \in A_2} min_{x \in A_1} u_2(x,y) \tag{5}$$

ii. Aus Gleichung (5) folgt mit Lemma 2.8:

$$\begin{aligned} u_2(x^*, y^*) &= -min_{y \in A_2} max_{x \in A_1} u_1(x,y) \\ \overset{u_1 = -u_2}{\Rightarrow} u_1(x^*, y^*) &= min_{y \in A_2} max_{x \in A_1} u_1(x,y) \end{aligned} \tag{6}$$

Zusammen mit Gleichung $(*)$ erhält man $max_{x \in A_1} min_{y \in A_2} u_1(x,y) = min_{y \in A_2} max_{x \in A_1} u_1(x,y) = u_1(x^*, y^*)$

iii. Sei $v^* = max_{x \in A_1} min_{y \in A_2} u_1(x,y) = min_{y \in A_2} max_{x \in A_1} u_1(x,y)$
$\overset{Lemma 2.8}{\Rightarrow} max_{y \in A_2} min_{x \in A_1} u_2(x,y) = -v^*$
Nun gilt $u_1(x^*, y) \geq v^* \ \forall y \in A_2$, da x^* ein MM für Spieler 1.
Ebenso $u_2(x, y^*) \geq -v^* \ \forall x \in A_1$, da y^* ein MM für Spieler 2.
Insbesondere gilt für $y = y^*$ und $x = x^*$:
$\overset{u_1 = -u_2}{\Rightarrow} u_1(x^*, y^*) = v^*$, da $u_1(x^*, y^*) \geq v^*$ und $u_2(x^*, y^*) \geq -v^*$
$\Rightarrow (x^*, y^*)$ ist ein Nash-Gleichgewicht.

Als nächstes versucht man Situationen zu modellieren, wo nicht alle Teilnehmer *perfekt* über die Charaktere der anderen Teilnehmer informiert sind.
Dazu betrachten wir nun strategische Spiele mit unvollkommmen Informationen.
In der Spieltheorie nennt man diese Spiele auch "Bayesianische Spiele".

2.13 Defintion: (Bayesianische Spiele)

Unter einem Bayesianischen Spiel G^* versteht man
ein Septupel $\langle N, (A_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N}, \Omega, (T_i)_{i\in N}, (\tau_i)_{i\in N}, (\mathbb{P}_i)_{i\in N}\rangle$ mit folgender Bedeutung :

1. $N = \{1, \dots, n\}$ ist eine endlich Spielermenge.
2. Ω ist eine endliche Menge von Zuständen.
3. A_i ist eine Menge von Strategien (Entscheidungen) von Spieler i.
4. T_i ist eine endliche Menge von Signalen, die von Spieler i beobachtet werden und $\tau_i : \Omega \to T_i$ eine Signalfunktion von Spieler i.
5. $\mathbb{P}_i$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über Zustandsmenge Ω (Glaubenszustand des Spielers i)
6. $\succeq_i$ ist eine Präferenzrelation über die Paare $(a, \omega) \in A \times \Omega$

Um diese Definition richtig zu verstehen, greifen wir nochmal auf das Beispiel 2.3.2 (Bach or Stravinsky) zurück und packen dieses in die Definition.

Beispiel: (Bach or Stravinsky)

__Annahme__: Mann hat Ungewissheit, ob sich die Frau mit Ihm treffen möchte, oder nicht.

1. $N = \{M, F\}$, dabei steht M für Mann und F für Frau.
2. $\Omega = \{treffen, vermeiden\}$ Menge der möglichen Zustände:
   Wenn sich die Frau mit dem Mann treffen möchte, dann ereignet sich der Zustand "treffen", andererseits "vermeiden".
3. $A_i = \{Bach, Stravinsky\}$ Menge der möglichen Strategien.
4. (a) Für Spieler M gilt: $\tau_M(treffen) = \tau_M(vermeiden) = s, s \in T_M$, dabei ist τ_M die Signalfunktion vom Mann, welche die Siganle des Mannes, die er aufnimmt, wiederspiegelt bevor er seine Strategie wählt.
   (b) Für Spieler F gilt: $\tau_F(treffen) = t, \tau_F(vermeiden) = v$ mit $t \neq v$ $t, v \in T_F$, dabei ist τ_F die Signalfunktion der Frau.
5. (a) Glaubenszustand (a priori belief)für M:
   $\mathbb{P}_M(treffen) = \mathbb{P}_M(vermeiden) = \frac{1}{2}$, wobei $\mathbb{P}_M$ ein W-Maß von M auf Ω ist.
   (b) Glaubenszustand (a priori belief)für F:
   $\mathbb{P}_F(treffen) = 1$ oder $\mathbb{P}_F(vermeiden) = 1$, wobei $\mathbb{P}_F$ ein W-Maß von F auf Ω ist.

Nun möchte wir basierend auf die Definition eines Bayes-Spiels verstehen, was ein Nash-Gleichgewicht eines Bayesianischen Spiels ist.

2.14 Defintion: (Nash-Gleichgewicht bei Bayes-Spiele)

Ein Nash-Gleichgewicht eines Bayes-Spiels G^* ist ein Nash-Gleichgewicht eines strategischen Spiel für das folgendes gilt:

- Die Spielermenge ist die Menge von alle Paaren $(i, t_i), i \in N,\ t_i \in T_i$
- A_i ist die Strategiemenge von jedem Spieler (i, t_i)
- Die Präferenzrelation $\succeq^*_{(i,t_i)}$ von jedem Spieler (i, t_i) ist definiert durch:
  $a^* \succeq^*_{(i,t_i)} b^* \Leftrightarrow L_i(a^*, t_i) \succeq_i L_i(b^*, t_i)$, wobei $L_i(a^*, t_i)$ eine Lotterie über $A \times \Omega$ ist mit
  $$L_i(a^*, t_i) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}_i(\omega)}{\mathbb{P}_i(\tau_i^{-1}(t_i))} & \omega \in \tau_i^{-1}(t_i) \\ 0 & sonst \end{cases} \text{ für das Aktionsprofil } (a^*(j, \tau_j(\omega))_{j \in N}, \omega)$$

Beispiel: (Vickreyauktion oder Zweitpreisauktion)

Annahme:

- Höchstbietener gewinnt die Auktion, bezahlt aber das zweithöchste Gebot
- Jeder Spieler darf nur einmal bieten und kennt nur sein eigenes Gebot. Ist von daher **ungewiss** über die Gebote der anderen Spieler.
- Menge der möglichen Gebote ist eine endliche Menge V
- Jeder Spieler glaubt, dass die Gebote der anderen Spieler unabhängig mit derselben Verteilung über V gezogen werden.

Bayes-Modell:

- Spielermenge $N = \{1, \ldots, n\}$
- Zustandsmenge $\Omega = V^n$ (Menge der Profile der Gebote)
- Strategiemenge $A_i = \mathbb{R}_+$
- Signalmenge $T_i = V$ mit Signalfunktion $\tau_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i$
- Glaubenszustand (a priori belief) $\mathbb{P}_i(v_1, \ldots, v_n) = \prod_{j=1}^{n} \pi(v_j)$ für eine W-Verteilung π über V
- Präferenzrelation $\succeq_i$ ist durch die Nutzenfunktion $u_i = \begin{cases} v_i - max_{j \in N \setminus \{i\}} v_j & v_i \geq v_j, \forall j \in N \\ 0 & sonst \end{cases}$ dargestellt.

Lösung:
Dieses Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht a^* für welches gilt $a^*(i, v_i) = v_i \forall i \in N$ und $v_i \in V = T_i$