Einführung in die Theorie der Markov-Ketten

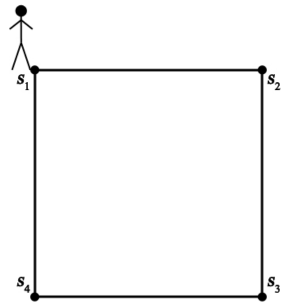
Jens Schomaker

Markov-Ketten

Zur Motivation der Einführung von Markov-Ketten betrachte folgendes Beispiel:

1.1 Beispiel
Wir wollen die folgende Situation mathematisch formalisieren:

> Eine Person steht in einer der vier Ecken eines Raumes - in diesem Fall s_1 - und wirft eine faire Münze, um zu entscheiden, ob sie sich im Uhrzeigersinn oder gegen ihn bewegt. Dies wiederholt die Person beliebig oft.



Man möchte also für alle Schritte des Experiments, die man anhand der natürlichen Zahlen abzählt, eine Zufallsvariable X_n definieren, welche die Ecke angibt, in der sich die Person im n-ten Schritt befindet.
D.h. man wählt einen (zeitdiskreten) stochastischen Prozess $(X_0, X_1, \ldots)$, der Werte in $\{s_1, \ldots, s_4\}$ annimmt. Dass ein zugehöriger Produktraum mit Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ wie unten existiert, ist nicht klar, wird aber durch den Satz von Ionescu-Tulcea geliefert, der aufgrund seines Umfangs jedoch nicht behandelt wird.
Um die Ausgangsbedingung, dass in s_1 gestartet wird, zu erfüllen, sollte gelten:

$$\mathbb{P}(X_0 = s_1) = 1.$$

Die Entscheidungsregel für die Bewegung liefert zudem:

$$\mathbb{P}(X_1 = s_2) = 1/2$$

und

$$\mathbb{P}(X_1 = s_4) = 1/2.$$

Um die Verteilungen der X_n für $n \geq 2$ zu berechnen, benötigt man nun jedoch bedingte Wahrscheinlichkeiten. Für den Fall $X_n = s_2$ ergibt sich z.B. aus der Entscheidungsregel für die Bewegung folgendes:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_1 \mid X_n = s_2) = 1/2$$

und

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_3 \mid X_n = s_2) = 1/2.$$

Genauer gilt sogar aufgrund der Entscheidungsregel, dass X_{n+1} nur von X_n abhängt; für $X_n = s_2$ und beliebige $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{1, \ldots, 4\}$ beispielsweise:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_1 \mid X_n = s_2, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_0 = s_{i_0}) = 1/2$$

und

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_3 \mid X_n = s_2, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_0 = s_{i_0}) = 1/2.$$

Diese beispielhaften Überlegungen fasst man nun in einer Definition zusammen:

1.2 Definition
Sei P eine $k \times k$-Matrix mit Einträgen $(P_{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$.
Ein (zeitdiskreter) stochastischer Prozess $(X_0, X_1, \dots)$ mit endlichem Zustandsraum $\{s_1, \dots, s_k\}$ heißt **(homogene) Markov-Kette mit Übergangsmatrix** P genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ und alle $i_0, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, k\}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \dots, X_0 = s_{i_0}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = P_{i,j}. \tag{1}$$

Die Einträge der Übergangsmatrix P heißen **Übergangswahrscheinlichkeiten** und die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{i,j}$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit sich zum Zeitpunkt $n+1$ im Zustand s_j zu befinden, gegeben, dass man zum Zeitpunkt n im Zustand s_i ist.
Die **Homogenität** der Markov-Kette ist dabei die Zeitunabhängigkeit, d.h zu allen Zeiten n liegen dieselben Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{i,j}$ bzw. liegt dieselbe Übergangsmatrix P vor. Homogenität wird in der Regel nicht erwähnt, da man diese Eigenschaft voraussetzen möchte, wenn man Markov-Ketten betrachtet.
Die Eigenschaft, die durch das erste Gleichheitszeichen in Gleichung 1 gegeben ist, wird dabei als **Markov-Eigenschaft** - kurz ME - oder auch Gedächtsnislosigkeit bezeichnet. Sie drückt aus, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von X_{n+1} unter $(X_0, \dots, X_n)$ nur von X_n abhängt und unabhängig von den vorhergehenden $X_0, \dots, X_{n-1}$ ist.

Mit dieser Definition ergeben sich direkt folgende Eigenschaften für die Übergangsmatrix:

i) $P_{i,j} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$, da (bedingte) Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sind.

ii) $\sum\limits_{j=1}^{k} P_{i,j} = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, da $\{s_1, \dots, s_k\}$ der gesamte Wertebereich von X_{n+1} ist:

$$\sum_{j=1}^{k} P_{i,j} = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = 1.$$

1.3 Beispiel
Das oben eingeführte Beispiel 1.1 hat also als Zustandsraum $\{s_1, \dots, s_4\}$ und als Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Definition
Eine einfache und nahezu selbsterklärende Möglichkeit die Übergangsmatrix darzustellen, ist ein **Übergangsgraph**. Der Übergangsgraph für Beispiel 1.1 sieht beispielsweise wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd}
s_1 \arrow[r, shift left, "1/2"] \arrow[d, shift right, "1/2"'] & s_2 \arrow[l, shift left, "1/2"] \arrow[d, shift right, "1/2"'] \\
s_4 \arrow[u, shift right, "1/2"'] \arrow[r, shift left, "1/2"] & s_3 \arrow[l, shift left, "1/2"] \arrow[u, shift right, "1/2"']
\end{tikzcd}$$

Die Zustände werden dabei mit den zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten verbunden, sofern diese nicht Null sind. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Zustand wegzeigen, ist dabei immer 1, was der spaltenweisen Aufsummierung zu 1 in der Übergangsmatrix entspricht (vgl. Definition 1.2, Eigenschaft ii).

Um das Beispiel 1.1 komplett zu erfassen, benötigen wir noch eine weitere Eigenschaft einer Markov-Kette:

1.5 Definition
Die **Anfangsverteilung** einer Markov-Kette $(X_0, X_1, \dots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \dots, s_k\}$ wird durch einen

Zeilenvektor $\mu^{(0)}$ wie folgt definiert:

$$\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \ldots, \mu_k^{(0)}) := (\mathbb{P}(X_0 = s_1), \ldots, \mathbb{P}(X_0 = s_k)).$$

Da $\mu^{(0)}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ ist, gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(0)} = 1.$$

Ebenso definiert man $\mu^{(n)}$ für $n \geq 1$ als die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Markov-Kette zum Zeitpunkt n als:

$$\mu^{(n)} = (\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_k^{(n)}) := (\mathbb{P}(X_n = s_1), \ldots, \mathbb{P}(X_n = s_k)).$$

Auch hier gilt analog:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(n)} = 1.$$

1.6 Beispiel
Das oben eingeführte Beispiel 1.1 hat also als Anfangsverteilung:

$$\mu^{(0)} = (1, 0, 0, 0).$$

Es wird sich in folgendem Satz zeigen, dass man zur Berechnung der $\mu^{(n)}$ lediglich die Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und die Übergangsmatrix P benötigt.

1.7 Satz
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$, Übergangsmatrix P und Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ gegeben. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n.$$

Beweis:

Induktion über n:

$n = 1$:

Sei $\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \ldots, \mu_k^{(0)})$, dann gilt für $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}
\mu_j^{(1)} &\overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = s_j) \\
&\overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_0 = s_i, X_1 = s_j) \\
&\overset{\text{bed. W.-keit}}{=} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_0 = s_i)\mathbb{P}(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(0)} P_{i,j} \\
&= (\mu^{(0)} P)_j.
\end{aligned}$$

Dabei ist $(\mu^{(0)} P)_j$ der j-te Eintrag des Zeilenvektors $\mu^{(0)} P$. Also gilt:

$$\mu^{(1)} = (\mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_k^{(1)}) = ((\mu^{(0)} P)_1, \ldots, (\mu^{(0)} P)_k) = \mu^{(0)} P.$$

$n \to n + 1$:

Sei also die Behauptung für n gezeigt. Zeige, dass sie auch für $n+1$ gilt. Für $j = 1, \dots, k$ gilt analog:

$$\begin{aligned}
\mu_j^{(n+1)} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_n = s_i, X_{n+1} = s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_n = s_i)\mathbb{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(n)} P_{i,j} \\
&= (\mu^{(n)} P)_j.
\end{aligned}$$

Also gilt auch $\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)} P$ und damit und der Induktionsvoraussetzung auch:

$$\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)} P \overset{\text{IV}}{=} \mu^{(0)} P^n P = \mu^{(0)} P^{n+1}.$$

□

1.8 Beispiel
Für Beispiel 1.1 ergibt sich mit Anfangsverteilung $\mu^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$ induktiv durch einfaches Nachrechnen:

$$\mu^{(n)} = \begin{cases} (0, 1/2, 0, 1/2) & \text{, falls } n \geq 1 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ (1/2, 0, 1/2, 0) & \text{, falls } n \geq 1 \text{ und } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Mit Anfangsverteilung $\mu^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$ vertauscht sich dagegen die Zuordnung von gerade und ungerade.

Die Wahl der Anfangsverteilung bestimmt also das Verhalten des weiteren Verlaufs der Verteilungen $\mu^{(n)}$, wie man hier sieht, und gehört zu einer vollständigen Charakterisierung einer Markov-Kette.

Ein anderes Beispiel gegeben durch eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \dots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, s_2\}$ und folgender Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

liefert induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^{(n)} = \begin{cases} (1/2(1 + 2^{-n}), 1/2(1 - 2^{-n})) & \text{, falls } \mu^{(0)} = (1, 0) \\ (1/2(1 - 2^{-n}), 1/2(1 + 2^{-n})) & \text{, falls } \mu^{(0)} = (0, 1) \end{cases}.$$

In beiden Fällen gilt jedoch $\lim_{n\to\infty} \mu^{(n)} = (1/2, 1/2)$.

1.9 Lemma
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \dots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \dots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Sei $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ für $n \geq 2$ so, dass $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n$. Dann gilt für alle $i_0, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$:

$$\mathbb{P}(X_{a_n} = s_{i_n}, \dots, X_{a_1} = s_{i_1} \mid X_{a_0} = s_{i_0}) = \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{a_{j+1}} = s_{i_{j+1}} \mid X_{a_j} = s_{i_j}).$$

Anschaulich: Die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Weges durch den Übergangsgraph mit gegebenen Zeiten ist gleich dem Produkt der einzelnen Wege mit den entsprechenden Zeiten.

Beweis:

Induktion über n:

$n = 2$:

Sei $\{a_0, a_1, a_2\} \subseteq \mathbb{N}$ so, dass $a_0 < a_1 < a_2$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{a_2} = s_{i_2}, X_{a_1} = s_{i_1} \mid X_{a_0} = s_{i_0}) \\
\overset{\text{bed. W.-keit}}{=} \; & \mathbb{P}(X_{a_2} = s_{i_2} \mid X_{a_1} = s_{i_1}, X_{a_0} = s_{i_0})\mathbb{P}(X_{a_1} = s_{i_1} \mid X_{a_0} = s_{i_0}) \\
\overset{\text{ME}}{=} \; & \mathbb{P}(X_{a_2} = s_{i_2} \mid X_{a_1} = s_{i_1})\mathbb{P}(X_{a_1} = s_{i_1} \mid X_{a_0} = s_{i_0}) \\
= \; & \prod_{j=0}^{1} \mathbb{P}(X_{a_{j+1}} = s_{i_{j+1}} \mid X_{a_j} = s_{i_j})
\end{aligned}$$

$n \to n+1$:

Sei $\{a_0, \ldots, a_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N}$ so, dass $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{a_{n+1}} = s_{i_{n+1}}, X_{a_n} = s_{i_n}, \ldots, X_{a_1} = s_{i_1} \mid X_{a_0} = s_{i_0}) \\
\overset{\text{bed. W.-keit}}{=} \; & \mathbb{P}(X_{a_{n+1}} = s_{i_{n+1}} \mid X_{a_n} = s_{i_n}, \ldots, X_{a_0} = s_{i_0})\mathbb{P}(X_{a_n} = s_{i_n}, \ldots, X_{a_1} = s_{i_1} \mid X_{a_0} = s_{i_0}) \\
\overset{\text{ME \& IV}}{=} \; & \mathbb{P}(X_{a_{n+1}} = s_{i_{n+1}} \mid X_{a_n} = s_{i_n}) \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{a_{j+1}} = s_{i_{j+1}} \mid X_{a_j} = s_{i_j}) \\
= \; & \prod_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_{a_{j+1}} = s_{i_{j+1}} \mid X_{a_j} = s_{i_j})
\end{aligned}$$

□

1.10 Lemma
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben. Seien $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) = (P^n)_{i,j} \text{ , insbesondere ist dies unabhängig von } m.$$

Beweis:

Sei m fest aber beliebig. Beweise die Behauptung durch Induktion über n:

$n = 1$:

$n = 1$ folgt direkt aus der Definition von Markov-Kette.

$n \to n+1$:

Sei also die Behauptung für n gezeigt. Zeige, dass sie auch für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{m+n+1} = s_j \mid X_m = s_i) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \; & \sum_{q=1}^{k} \mathbb{P}(X_{m+n} = s_q, X_{m+n+1} = s_j \mid X_m = s_i) \\
\overset{1.9}{=} \; & \sum_{q=1}^{k} \mathbb{P}(X_{m+n} = s_q \mid X_m = s_i)\mathbb{P}(X_{m+n+1} = s_j \mid X_{m+n} = s_q) \\
\overset{\text{IV \& Def.}}{=} \; & \sum_{q=1}^{k} (P^n)_{i,q} P_{q,j} \\
= \; & (P^n P)_{i,j} \\
= \; & (P^{n+1})_{i,j}
\end{aligned}$$

□

1.11 Kolmogorov-Chapman-Gleichung
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben. Seien $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Kolmogorov-Chapman-Gleichung:

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_0 = s_i) = \sum_{q=1}^{k} \mathbb{P}(X_m = s_q \mid X_0 = s_i)\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_q).$$

Anschaulich: Die Wahrscheinlichkeit aller Wege gegeben durch Anfangs- und Endpunkt durch den Übergangsgraph mit gegebenen Anfangs- und Endzeiten ist gleich der Summe aller möglichen Wege mit festem Zeitpunkt für einen festen Zwischenschritt.

Insbesondere gilt damit auch für alle $q \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_0 = s_i) \geq \mathbb{P}(X_m = s_q \mid X_0 = s_i)\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_q)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_0 = s_i) &\overset{1.10}{=} (P^{m+n})_{i,j} \\
&= \sum_{q=1}^{k} (P^m)_{i,q}(P^n)_{q,j} \\
&\overset{1.10}{=} \sum_{q=1}^{k} \mathbb{P}(X_m = s_q \mid X_0 = s_i)\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_q)
\end{aligned}$$

□

Irreduzible und aperiodische Markov-Ketten

In diesem Kapitel werden zwei grundlegende Eigenschaften von Markov-Ketten beschrieben.

2.1 Definition
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Man sagt, dass **ein Zustand s_i mit einem Zustand s_j kommuniziert**, in Zeichen $s_i \to s_j$, genau dann, wenn die Markov-Kette positive Wahrscheinlichkeit besitzt, innerhalb einer Zeit n von Zustand s_i nach Zustand s_j zu gelangen; d.h. wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass:

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) > 0.$$

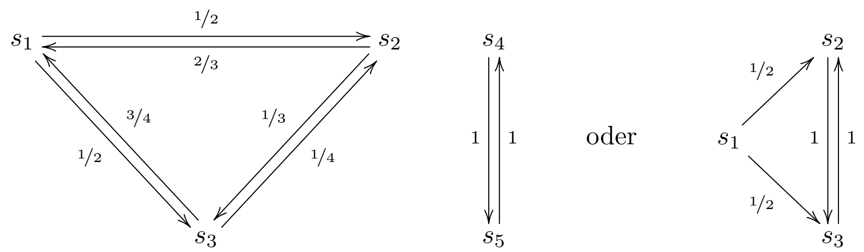
Nach Lemma 1.10 ist dies unabhängig von m und es gilt $\mathbb{P}(X_{m+n} = s_j \mid X_m = s_i) = (P^n)_{i,j}$.

Weiter sagt man, dass **zwei Zustände s_i und s_j miteinander kommunizieren**, in Zeichen $s_i \leftrightarrow s_j$, genau dann, wenn $s_i \to s_j$ und $s_j \to s_i$.

2.2 Definition
Eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P heißt **irreduzibel** genau dann, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt, dass $s_i \leftrightarrow s_j$. Ansonsten heißt die Markov-Kette **reduzibel**.

Eine äquivalente Formulierung für Irreduzibilität ist, dass für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(P^n)_{i,j} > 0$ existiert.

2.3 Beispiel
Die Irreduzibilität lässt sich am Übergangsgraph leicht veranschaulich und auch überprüfen, indem man alle Paare von Zuständen darauf überprüft, ob es jeweils einen Weg von einem Zustand in den anderen gibt. Die Markov-Kette aus Beispiel 1.1 ist z.B. irreduzibel. Übergangsgraphen von reduzibelen Markov-Ketten sind z.B. wie folgt gegeben:



Man sieht hier auch die Rechtfertigung für die Bezeichnung „reduzibel“, da das Betrachten des Langzeitverhaltens einer reduzibelen Markov-Kette, d.h. das Verhalten der $\mu^{(n)}$ für große n, sich auf das Betrachten einer Markov-Kette mit kleinerem Zustandsraum und entsprechend angepasster Übergangsmatrix vereinfachen lässt.

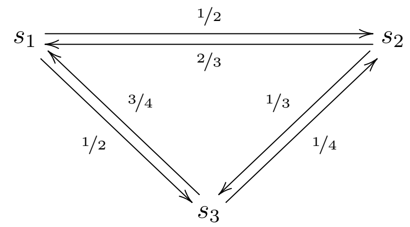
2.4 Definition
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Die **Periode $d(s_i)$ eines Zustandes s_i** definiert man als:

$$d(s_i) := \mathrm{ggT}(\{n \geq 1 \mid (P^n)_{i,i} > 0\}) \text{ , wobei } \mathrm{ggT}(\varnothing) := \infty.$$

In Worten bedeutet dies, dass die Periode von s_i der größte gemeinsame Teiler der Menge von Zeiten ist, an denen die Markov-Kette wieder nach s_i (mit positiver Wahrscheinlichkeit) zurückkehren kann, sofern die Markov-Kette in s_i gestartet ist, d.h. $X_0 = s_i$.
Ist $d(s_i) = 1$, so heißt der Zustand s_i **aperiodisch** (die Markov-Kette kann also „unregelmäßig" nach s_i zurückkehren).

2.5 Definition
Sei eine Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Falls alle Zustände der Markov-Kette aperiodisch sind, so heißt auch die Markov-Kette **aperiodisch**. Andernfalls heißt sie **periodisch**.

2.6 Beispiel
Betrachte nur den Teil der linken Markov-Kette aus Beispiel 2.3 bestehend aus den Zuständen $\{s_1, s_2, s_3\}$, also den folgenden Übergangsgraph:



Man sieht leicht mit den Aussagen aus 1.10 und 1.11, dass für jeden Zustand s_i gilt:

$$(P^2)_{i,i} > 0 \text{ und } (P^3)_{i,i} > 0, \text{ und damit auch } d(s_i) = 1.$$

Also ist diese reduzierte Markov-Kette aperiodisch.

Das Beispiel 1.1 hingegen ist periodisch, da für jeden Zustand s_i gilt:

$$(P^n)_{i,i} > 0 \text{ genau dann, wenn } n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Also ist $d(s_i) = \mathrm{ggT}(\{2k > 0 \mid k \in \mathbb{N}\}) = 2$. Man sieht hier auch den Zusammenhang zu den in Beispiel 1.8 berechneten Verteilungen $\mu^{(n)}$, da man sich in Abhängigkeit vom Startzustand immer alternierend zwischen den Zustandspaaren s_1, s_3 und s_2, s_4 bewegt.

Vorbereitend für den nächsten Satz benötigt man folgendes Lemma:

2.7 Lemma
Sei $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ eine Menge positiver, natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mathrm{ggT}(A) = 1$, und

ii) A ist abgeschlossen unter Addition, d.h. wenn $a, b \in A$ gilt, dann gilt auch $a + b \in A$.

Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $n \in A$ für alle $n \geq N$.

Beweis: siehe Appendix in Brémaud, Pierre (1998) *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer, New York.

2.8 Satz
Sei eine aperiodische Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$(P^n)_{i,i} > 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ und alle } n \geq N.$$

Beweis:

Für jeden Zustand s_i definiere $A_i := \{n \geq 1 \mid (P^n)_{i,i} > 0\}$.
Nach Voraussetzung ist die Markov-Kette aperiodisch, d.h. alle Zustände sind aperiodisch und somit gilt $\mathrm{ggT}(A_i) = 1$. Zur Anwendung des Lemmas benötigt man nun die Abgeschlossenheit unter Addition für A_i:

Seien $a_1, a_2 \in A_i$, d.h. es gilt

$$(P^{a_1})_{i,i} \overset{1.10}{=} \mathbb{P}(X_{a_1} = s_i \mid X_0 = s_i) > 0 \text{ und } (P^{a_2})_{i,i} \overset{1.10}{=} \mathbb{P}(X_{a_1+a_2} = s_i \mid X_{a_1} = s_i) > 0.$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned}
(P^{a_1+a_2})_{i,i} &\overset{1.10}{=} \mathbb{P}(X_{a_1+a_2} = s_i \mid X_0 = s_i) \\
&\geq \mathbb{P}(X_{a_1+a_2} = s_i, X_{a_1} = s_i \mid X_0 = s_i) \\
&\overset{1.9}{=} \mathbb{P}(X_{a_1} = s_i \mid X_0 = s_i)\mathbb{P}(X_{a_1+a_2} = s_i \mid X_{a_1} = s_i) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Also gilt auch $a_1 + a_2 \in A_i$.

Mit dem Lemma angewandt auf A_i folgt nun, dass ein $N_i \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle $n \geq N_i$. $N := \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ liefert die Behauptung des Satzes. □

2.9 Korollar
Sei eine aperiodische und irreduzibele Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass

$$(P^n)_{i,j} > 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \ldots, k\} \text{ und alle } n \geq M.$$

Beweis:

Aufgrund der Aperiodizität und Satz 2.8 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $(P^n)_{i,i} > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $n \geq N$. Für zwei Zustände s_i und s_j existiert aufgrund der Irreduzibilität ein $n_{i,j} \in \mathbb{N}$ so, dass $(P^{n_{i,j}})_{i,j} > 0$. Sei $M_{i,j} := N + n_{i,j}$, dann gilt für jedes $m \geq M_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
(P^m)_{i,j} &= \mathbb{P}(X_m = s_j \mid X_0 = s_i) \\
&\geq \mathbb{P}(X_m = s_j, X_{m-n_{i,j}} = s_i \mid X_0 = s_i) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}(X_{m-n_{i,j}} = s_i \mid X_0 = s_i)}_{>0, \text{ da } m-n_{i,j} \geq N} \underbrace{\mathbb{P}(X_m = s_j \mid X_{m-n_{i,j}} = s_i)}_{>0, \text{ nach Wahl von } n_{i,j}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$M := \max\{M_{i,j} \mid i, j = 1, \ldots, k\}$ liefert die Behauptung des Korollars. □

2.10 Satz
Sei eine irreduzibele Markov-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit Zustandsraum $\{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P gegeben.
Wenn ein Zustand s_i mit $P_{i,i} > 0$ existiert, dann ist die Markov-Kette auch aperiodisch.

Beweis:

Zu zeigen, dass die Markov-Kette aperiodisch ist, bedeutet für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$:

$$1 = d(s_j) = \text{ggT}(\{n \geq 1 \mid (P^n)_{j,j} > 0\}).$$

Sei also $j \in \{1, \ldots, k\}$ beliebig und $i \in \{1, \ldots, k\}$ nach Voraussetzung so, dass $P_{i,i} > 0$.
Aufgrund der Irreduzibilität existieren $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $(P^{m_1})_{i,j} > 0$ und $(P^{m_2})_{j,i} > 0$.
Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(P^{m_2+n+m_1})_{j,j} &= \mathbb{P}(X_{m_2+n+m_1} = s_j \mid X_0 = s_j) \\
&\geq \mathbb{P}(X_{m_2+n+m_1} = s_j, X_{m_2+n} = s_i, \ldots, X_{m_2} = s_i \mid X_0 = s_j) \\
&\overset{1.9}{=} (P^{m_2})_{j,i}(P_{i,i})^n(P^{m_1})_{i,j} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{n \geq 1 \mid (P^n)_{j,j} > 0\} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, m_2 + m_1 - 1\}$
$\Rightarrow \{n \geq 1 \mid (P^n)_{j,j} > 0\}$ enthält mindestens zwei Primzahlen.
$\Rightarrow d(s_j) = \text{ggT}(\{n \geq 1 \mid (P^n)_{j,j} > 0\}) = 1.$ □