Seminararbeit zur Spieltheorie

Thema: Rationalisierbarkeit und Wissen

Westfälische-Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Dozent: Prof. Dr. Löwe
Verfasst von: Maximilian Mümken
Sommersemester 2012
Vortrag am 22.05.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit und dem dazugehörigen Vortrag geht es darum Fragen zum Thema Rationalisierbarkeit und Wissen nachzugehen, sowie deren Auswirkungen auf Spiele oder Ausgänge. Der erste Teil zur Rationalisierbarkeit behandelt die Frage, wann eine Strategie rationalisierbar ist und welche Bedeutungen eben diese hat. Ziel wird es dabei sein herauszufinden, wie man rationalisierbare Strategien in einem Spiel findet. Dazu wird die iterative Eliminierung schlechter Strategien zur Findung rationalisierbarer Möglichkeiten vorgestellt.
Der zweite Teil behandelt das Wissen einzelner Spieler in einem strategischen Spiel und die Auswirkungen, die Wissen über andere Spieler und das Wissen anderer Spieler haben kann. Dabei soll zunächst beschrieben werden, wie sich Wissen im mathematischen Modell eines strategischen Spiels ausdrücken lässt, um dann Lösungskonzepte für spezifische Situationen oder Spiele zu analysieren.

2 Rationalisierbarkeit und iterative Eliminierung dominierter Strategien

2.1 Rationalisierbarkeit

In diesem Kapitel werden Strategien von Spielern in einem strategischen Spiel untersucht unter der Voraussetzung, dass die Spieler ihren erwarteten Nutzen maximieren möchten. Dafür müssen die Spieler sich gewisse Erwartungen darüber bilden, wie sich die anderen Mitspieler möglicherweise Verhalten werden. Diese spiegeln sich in einem Glauben wieder, der damit konsistent ist, dass alle Spieler rational sind, alle Spieler denken, dass alle Spieler rational sind, alle Spieler denken, dass alle Spieler denken, dass alle Spieler rational sind, usw., d.h. jeder Spieler gibt immer die bestmögliche Antwort auf die Strategien anderer. Die Rationalität aller Spieler ist also gemeinsames Wissen.
Dieser Glaube über die Strategien der anderen Spieler muss keineswegs richtig sein. Jeder Spieler denkt, dass die der anderen gewählten Strategien beste Antworten zu ihren jeweiligen Glauben sind.
Sei im folgenden immer $G := (N, (A_i), (u_i))$ ein strategisches Spiel, wobei u_i den erwarteten Nutzen oder die erwartete Auszahlung von Spieler i darstellt und N die Menge der Spieler 1,...,n , $n \in \mathbb{N}$ ist. A_i sei die Menge der möglichen Strategien von Spieler i (nicht notwendigerweise endlich) und $A := \otimes_{i \in N} A_i$.
Ein *Glaube* μ_i von Spieler i (über die Strategien der anderen Spieler) ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf A_{-i} (=$\otimes_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$).

Definition 1. *Eine Strategie $a_i \in A_i$ ist* **rationalisierbar** *im strategischen Spiel G, falls für alle $j \in N$ die Mengen $Z_j \subseteq A_j$ existieren, so dass:*

- *jede Strategie $a_j \in Z_j$ eine beste Antwort zu einem Glauben $\mu_j(a_j)$ von Spieler j ist, dessen Träger Teilmenge von Z_{-j} ist, und*

- $a_i \in Z_i$ *ist.*

Eine Strategie ist also rationalisierbar, wenn sie die beste Antwort im Bezug auf eine andere rationalisierbare Strategie ist.
Daraus sieht man schnell, dass in einem endlichen Spiel jede Strategie, die Teil eines gemischten Nash-Gleichgewichts ist, rationalisierbar ist. Nun folgt, dass dies auch für korrelierte Gleichgewichte gilt.

Lemma 1. *Jede Strategie, die mit positiver Wahrscheinlichkeit von irgendeinem Spieler in einem korrelierten Gleichgewicht eines endlichen strategischen Spiels gespielt wird, ist rationalisierbar.*

Beweis. Betrachte ein korreliertes Gleichgewicht und setze für alle $i \in N$ die Menge Z_i als die Menge der Strategien, die Spieler i mit positiver Wahrscheinlichkeit in diesem Gleichgewicht spielt. Dann ist jedes a_i beste Antwort zu der Verteilung über A_{-i}, die erzeugt wird von den Strategien der anderen Spieler, gegeben Spieler i spielt a_i.
Dann ist der Träger dieser Verteilung eine Teilmenge von Z_{-i} und also ist a_i nach Definition 1 rationalisierbar. □

In der bisherigen Definition war der Glaube des Spieles i definiert als Wahrscheinlichkeitsmaße auf A_{-i}. Dies ließ zu, dass die Strategien der Gegner korreliert seien. In vielen Teilen der Literatur sind die Glauben definiert als Produkt von unabhängigen Wahrscheinlichkeitsmaßen. Um den Unterschied zu verdeutlichen hier ein Beispiel:

	L	R		L	R		L	R		L	R
U	8	0		4	0		0	0		3	3
D	0	0		0	4		0	8		3	3
	M_1			M_2			M_3			M_4	

Beispiel 1.
In diesem 3-Spieler Spiel wählt Spieler 1 die Zeile (U oder D), Spieler 2 wählt eine Spalte aus (L oder R) und Spieler 3 wählt eine der vier Tabellen aus (M_1, M_2, M_3 oder M_4). Die Zahl in der jeweiligen Zelle ist der Nutzen/ das Ergebnis für alle drei Spieler. Im Sinne der vorigen Definition ist M_2 für Spieler 3 rationalisierbar, aber **nicht** *rationalisierbar, falls der Glaube ein Produkt unabhängiger Wahrscheinlichkeitsmaße sein muss!*
Für Spieler 1 ist U eine beste Antwort auf den Glauben, der (L,M_2) Wahrscheinlichkeit 1 zuordnet (hier wäre $\mu_1(L, M_2) = 1$) und D für (R,M_2). Analog für Spieler 2. Also ist M_2 dann beste Antwort auf den Glaube bei dem Spieler 1 u. 2 (U,L) und (D,R) mit gleicher Wahrscheinlichkeit spielen. Daher ist M_2 rationalisierbar nach Definition mit $Z_1 = \{U, D\}$, $Z_2 = \{L, R\}$, $Z_3 = \{M_2\}$.

M_2 ist aber nicht rationalisierbar für unabhängige gemischte Strategien, denn sonst müsste gelten:

$$4pq + 4(1-p)(1-q) > max\{8pq, 8(1-p)(1-q), 3\} \qquad (1)$$

Das ist für reelle p und q nicht lösbar. mit $(p, 1-p)$ und $(q, 1-q)$ als gemischte Strategien von Spieler 1 und 2.

2.2 Iterative Eliminierung von strikt dominierten Strategien

Die oben eingeführte Sichtweise bezieht sich auf den einzelnen Spieler, basierend auf Berechnungen, die kein Wissen über andere Spieler erfordern.
Für einen Spieler ist es sinnvoll diejenigen Strategien auszuschließen, die auf keinen Fall gewählt werden sollten, weil sie "schlecht" sind. Dies kann in komplexen Spielen die Situation eines Spieler vereinfachen.
Ziel ist es also solche Strategien zu eliminieren, die nie eine beste Antwort sind, egal was die übrigen Spieler tun. Mit dem Wissen, alle Spieler sind rational, werden von allen die nie-besten-Antworten ausgeschlossen.

Definition 2. *Eine Strategie von Spieler i im strategischen Spiel G ist* **nie-beste Antwort***, falls sie zu keinem Glauben von Spieler i eine beste Antwort ist.*

Definition 3. *Eine Strategie $a_i \in A_i$ im strategischen Spiel G ist* **strikt dominiert***, falls eine gemischte Strategie α_i von Spieler i existiert, so dass*

$$U_i(a_{-i}, \alpha_i) > u_i(a_{-i}, a_i) \text{ für alle } a_{-i} \in A_{-i},$$

wobei $U_i(a_{-i}, \alpha_i)$ die Nutzenfunktion von i ist, wenn er die gemischte Strategie α_i spielt.

Lemma 2. *Eine Strategie von einem Spieler in einem endlichen strategischen Spiel ist genau dann nie-beste-Antwort, wenn sie strikt dominiert ist.*

(ohne Beweis)

Definition 4. *Die Menge $X \subseteq A$* **überlebt iterative Eliminierung von strikt dominierten Strategien***, falls $X = \otimes_{j\in N} X_j$ und eine Folge $((X_j^t)_{j\in N})_{t=0}^T$ von Mengen existieren für die folgendes gilt:*

i) $X_j^0 = A_j$ *und* $X_j^T = X_j$ $\forall j \in N$

ii) $X_j^{t+1} \subseteq X_j^t$ *für* $t = 0, ..., T-1$, $\forall j \in N$

iii) für alle $t = 0, ..., T-1$ ist jede Strategie von Spieler $j \in N$ in $X_j^t \backslash X_j^{t+1}$ strikt dominiert in dem Spiel $(N, (X_i^t), (u_i^t))$, wobei u_i^t die Funktion u_i eingeschränkt auf $\otimes_{j\in N} X_j^t$ sei

iv) keine Strategie in X_j^T ist strikt dominiert in $(N, (X_i^T), (u_i^T))$.

Beispiel 2. *Bei dem durch die Tabelle beschriebenen Spiel handelt es sich um ein 2-Spieler Spiel, in dem Spieler 1 sich für eine der drei Zeilen entscheidet, T, M oder B, und Spieler 2 entscheidet sich zwischen den Spalten L und R.*

	L	R
T	$3,0$	$0,1$
M	$0,0$	$3,1$
B	$1,1$	$1,0$

Hier ist B dominiert von der gemischten Strategie bei der T und M mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewählt werden. Nachdem B ausgeschlossen wurde ist L dominiert von R. Weiter ist T dann dominiert von M. Also ist das einzige Ereignis, das die iterierte Elimination überlebt (M, R).

Proposition 1. *Falls $X = \otimes_{j \in N} X_j$ iterative Eliminerung in G überlebt, dann ist X_j genau die Menge der rationalisierbaren Strategien für jedes $j \in N$.*

Beweis. Sei $a_i \in A_i$ rationalisierbar und sei $(Z_j)_{j \in N}$ die Mengenfolge aus Definition 1. Für alle t gilt dann $Z_j \subseteq X_j^t$, da jede Strategie in Z_j beste Antwort zu einem Glauben ist, und daher auch nicht strikt dominiert. Also gilt $a_i \in X_i$.
Nun bleibt zu zeigen, dass für jedes $j \in N$ jedes Element aus X_j rationalisierbar ist. Per Definition ist keine Strategie in X_j strikt dominiert im Spiel $G' = (N, (X_j^T), (u_j^T))$. Also gilt nach Lemma 2., dass jede Strategie in X_j eine beste Antwort zu einem Glauben unter den Strategien in X_j ist.
Es muss noch gelten, dass jede Strategie in X_j eine beste Antwort zu unter den Strategien in A_j zu einem beliebigen Glauben ist. Falls $a_j \in X_j$ keine beste Antwort unter den Strategien in A_j ist, existiert ein t, so dass a_j eine beste Antwort in X_j^t zu einem Glauben μ_j ist, aber nicht beste Antwort in X_j^{t-1}. Dann existiert also eine Strategie $b_j \in X_j^{t-1} \setminus X_j^t$, die eine beste Antwort in X_j^{t-1} zu μ_j ist. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass b_j an der t'ten Stelle eliminiert wird. □

Anhand von Beispiel 1 sieht man, dass auch hier für den Glauben der Spieler nicht gilt, dass die anderen Spieler unabhängig voneinander entscheiden. M_2 wäre in diesem Fall keine beste Antwort zu irgendeiner (unabhängigen) gemischten Strategie der anderen Spieler.

3 Wissen und Gleichgewichte

In diesem Kapitel werden zu dem Begriff Gemeinsames Wissen (Common Knowledge) Wissens-Modelle dargestellt, dabei sind dann Lösungskonzepte für gegebene Situationen

und Spiele interessant.
Da ein strategisches Spiel auf Interaktion der Spieler basiert, interessiert nicht nur, was die einzelnen Spieler über das Spiel wissen, sondern auch das Wissen über die anderen Spieler und deren Wissen.

3.1 Ein Modell von Wissen

Zu Grunde liegt eine Menge Ω von Zuständen ω (der *Zustandsraum*). Es gibt unterschiedlichen Interpretationen dieses Raumes:
Zum Einen die, bei der Ω nur die für den Entscheider relevanten Informationen, die ihn auch beeiflussen, beinhaltet. Und zum Anderen die, bei der der Zustandsraum eine komplette Beschreibung der Umwelt liefert, sodass auch unwichtige Informationen enthalten sind. Wir beziehen uns zunächst auf Erstere.

Definition 5. *Eine* **Informations-Funktion** *für die Menge Ω der Zustände ist eine Funktion, die jedem Zustand $\omega \in \Omega$ eine nicht-leere Teilmenge $P(\omega) \subseteq \Omega$ zuordnet.*

Die Informations-Funktion bedeutet also, dass für den Fall das Zustand ω eingetreten ist, ein Spieler die Information hat welche Zustände möglich sind, nämlich alle $\omega' \in P(\omega)$.

Definition 6. *Eine Informations-Funktion heißt* **partitional**, *wenn es eine Partition von Ω gibt, so dass für alle $\omega \in \Omega$ die Teilmenge $P(\omega)$ das Element der Partition ist, das ω enthält.*

Lemma 3. *Eine Informations-Funktion P ist genau dann partitional, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

i) $\omega \in P(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$ *(P1)*

ii) falls $\omega' \in P(\omega) \Rightarrow P(\omega') = P(\omega)$ *(P2)*

Beweis. Sei P partitional. Dann erfüllt es offentsichtlich i) und ii).
Erfülle P i) und ii). Falls $P(\omega)$ und $P(\omega')$ sich schneiden und $\omega'' \in P(\omega) \cap P(\omega')$ dann gilt nach (P2) $P(\omega) = P(\omega') = P(\omega'')$. Nach (P1) gilt $\cup_{\omega\in\Omega} P(\omega) = \Omega$. Also ist P partitional. $\square$

Eine Menge von Zuständen, E ($\subseteq \Omega$), sei im folgenden mit Ereignis bezeichnet. Mit gegebener Definition weiß ein Spieler, falls $P(\omega) \subseteq E$ für $\omega \in \Omega$, dass ein Zustand aus dem Ereignis E eingetreten ist. Der Spieler kennt damit E. Anhand folgt die Wissens-Funktion.

Definition 7. *Sei eine Informations-Funktion P gegeben. Dann heißt K* **Wissens-Funktion** *mit $K(E) = \{\omega \in \Omega | P(\omega) \subseteq E\}$. Für alle Ereignisse E ist K(E) die Menge der Zustände, in denen der Spieler E kennt.*
Wissens-Funktionen, die von Informations-Funktionen hergeleitet sind, erfüllen folgende Bedingungen:

- *(K1)* $K(\Omega) = \Omega$
- *(K2) falls* $E \subseteq F \Rightarrow K(E) \subseteq K(F)$
- *(K3)* $K(E) \cap K(F) = K(E \cap F)$

  Falls P auch (P1) erfüllt, gilt zusätzlich:
- *(K4)* $K(E) \subseteq E$ *(Wissens-Axiom)*

  Erfüllt P zusätzlich (P2), gilt weiter:
- *(K5)* $K(E) \subseteq K(K(E))$ *(Transparenz-Axiom)*
- *(K6)* $\Omega \backslash K(E) \subseteq K(\Omega \backslash K(E))$ *(Weisheits-Axiom)*

Aus einer Informations-Funktion wurde eine Wissens-Funktion hergeleitet. Alternativ geht es auch umgekehrt. Dann gilt für die Informations-Funktion P:

$$P(\omega) = \cap\{E \subseteq \Omega | \omega \in K(E)\} \tag{2}$$

Beispiel 3 (Hüte-Puzzle). *Sei ein Spiel gegeben mit N Spielern, die alle gemeinsam an einem Tisch sitzen. Jeder von ihnen trägt einen Hut, der entweder weiß oder schwarz ist. Unter allen ist bekannt, dass mindestens ein weißer Hut dabei ist. Der Spielleiter wird Runden anzählen und in jeder Runde können die Spieler aufstehen, wenn sie sicher ihre Hutfarbe wissen. Es gilt zu klären, wann wird der erste Spieler aufstehen?*
Wir möchten den etwas vereinfachten Fall darstellen mit $|N| = 10$. *Mit den gegebenen Informationen ergibt sich der Zustandsraum* $\Omega = \{c \in \{S, W\}^{10} \mid |\{i : c_i = W\}| = 1\}$, *wobei* W *und* S *für weiß und schwarz stehen. Also gilt* $|\Omega| = 2^{10} - 1$.
Dann gibt es für die Informations-Fkt. eines Spielers i in der ersten Runde für $c \in \Omega$ *die Möglichkeiten* $P_i^1(c) = \{(c_{-i}, S), (c_{-i}, W)\}$,*falls er seine eigene Farbe nicht kennt, oder* $P_i^1(c) = \{c\}$, *wenn er sie kennt. Das Ereignis,bei dem ein Spieler seine Hutfarbe kennt lautet dann* $E_i = \{c \mid P_i(c) \subseteq \{c : c_i = S\} oder P_i(c) \subseteq \{c : c_i = W\}\}$ *Seien hier die Hüte* $1, 2$ *und* 3 *weiß. Nun startet das Spiel:*
1. Runde: keiner steht auf
Das Ereignis $F^1 = \{c \mid |\{i : c_i = W\}| = 1\}$ *beschreibt genau den Fall, dass in der ersten Runde ein Spieler aufsteht. Es folgt für die nächste Runde* $P_i^2(c) = P_i^1(c) \backslash F^1$.
2. Runde: keiner steht auf
Analog ergibt sich $F^2 = \{c \mid |\{i : c_i = W\}| = 2\}$. *Und für die Info-Fkt. folgt* $P_i^3(c) = P_i^2(c) \backslash F^2$.
3. Runde: Spieler 1,2 *und* 3 *stehen auf*
Für die Spieler $1, 2$ *und* 3 *reichen die gegeben Informationen aus, um zu wissen, dass ihre Hüte weiß sind. Da wir uns in Runde 3 befinden, wissen sie, dass 3 weiße Hüte im Spiel sind, und sehen selbst nur 2. Daraus lässt sich schließen, dass der eigene Hut weiß sein muss.*

Nach dem gleichen Prinzip wird schnell deutlich, dass für eine beliebige Anzahl Spieler N und k weiße Hüte, nach k Runden, genau die Spieler mit weißen Hüten aufstehen.

3.2 Gemeinsames Wissen

Ein Ereignis ist beidseitiges/gegenseitiges Wissen in einem Zustand, falls in diesem Zustand alle Spieler das Ereignis kennen. Bei gemeinsamem Wissen geht es darum, dass das Wissen nicht nur beidseitig ist, sondern jeder weiß, dass alle es wissen und jeder weiß, dass alle wissen, dass es alle wissen, usw.
Im 2-Spieler Spiel lässt sich dieses anschaulicher gestalten.

Definition 8. *Seien K_1, K_2 Wissens-Funktionen von Spielern 1 und 2 für den Zustandsraum Ω. Ein Ereignis $E \subseteq \Omega$ heißt* **gemeinsames Wissen zwischen 1 und 2 im Zustand** $\omega \in \Omega$, *falls ω Element von jeder Menge in der unendlichen Sequenz $K_1(E)$, $K_2(E)$, $K_1(K_2(E))$, $K_2(K_1(E))$,... ist.*

Beispiel 4. *Sei $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_6\}$, P_1, P_2 partitionale Informations-Funktionen von 1 und 2. Seien K_1, K_2 die zugehörigen Wissens-Funktionen und die zugehörigen Partitionen:*

$$\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6\}\} \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}\} \tag{4}$$

Das Ereignis $E = \{\omega_1, ..., \omega_4\}$ ist kein gemeinsames Wissen zwischen 1 und 2, denn $K_1(K_2(K_1(E))) = \emptyset$:

$$K_1(E) = \{\omega_1, \omega_2\} \qquad K_2(E) = E \tag{5}$$

$$K_2(K_1(E)) = \{\omega_1\} \qquad K_1(K_2(E) = \{\omega_1, \omega_2\} \tag{6}$$

$$K_1(K_2(K_1(E))) = \emptyset \qquad K_2(K_1(K_2(E))) = \{\omega_1\} \tag{7}$$

Das Ereignis $F = \{\omega_1, ..., \omega_5\}$ hingegen ist gemeinsames Wissen.

3.3 Wissen und Lösungskonzepte

In diesem Teil sei der Zustandsraum eine Beschreibung der Dinge, die für das Spiel relevant sind. Jeder Zustand ω ist also eine Beschreibung des Wissens, der Strategien und des Glaubens eines jeden Spielers. Formal bedeutet dieses für jeden Spieler i:

- $P_i(\omega) \subseteq \Omega$ (P_i partitional)
- $a_i(\omega) \in A_i$; Strategie von Spieler i im Zustand ω
- $\mu_i(\omega)$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf A_{-i}, der Glaube von Spieler i

Das Spiel G=$(N, (A_i), (\succeq_i))$ ist gemeinsames Wissen aller Spieler ist. Also kennt jeder Spieler i seine eigenen Möglichkeiten A_i und die der anderen.

Proposition 2. *Sei für $\omega \in \Omega$ und für jeden Spieler $i \in N$ gelte:*

i) er kennt die Strategien der anderen Spieler,d.h. $P_i(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega \mid a_{-i}(\omega') = a_{-i}(\omega)\}$

ii) er hat einen Glauben, der konsistent mit dem eigenen Wissen ist, d.h. der Träger von $\mu_i(\omega)$ ist Teilmenge von $\{a_{-i}(\omega') \in A_{-i} \mid \omega' \in P_i(\omega)\}$

iii) i ist rational, d.h. $a_i(\omega)$ ist beste Antwort zu $\mu_i(\omega)$

Dann ist $(a_i(\omega))_{i \in N}$ ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Nach iii) ist $a_i(\omega)$ beste Antwort von i zu seinem Glauben $\mu_i(\omega)$, der nach ii) Wahrscheinlichkeit 1 der Menge $\{a_{-i}(\omega') \in A_{-i} \mid \omega' \in P_i(\omega)\}$ zuordnet. Nach i) ist diese Menge $\{a_{-i}(w)\}$. □

Die Annahme, dass jeder Spieler auch die Strategien jedes anderen kennt ist sehr stark und nicht immer gegeben.
In einem 2-Spieler Spiel reicht die Voraussetzung, dass ein Spieler den Glauben des anderen kennt, falls iii) aus voriger Proposition erweitert wird, dass nicht nur jeder rational ist, sondern jeder auch weiß, dass der andere es ist.
Sei $G = (N, (A_i), (u_i))$ das strategische Spiel.

Proposition 3. *Sei $|N| = 2$ und für jeden Zustand $\omega \in \Omega$*

i) kennt jeder den Glauben des anderen, $P_i(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega \mid \mu_j(\omega') = \mu_j(\omega)\} \quad j \neq i$

ii) hat jeder einen Glauben, der konsistent mit seinem Wissen ist,d.h. der Träger von $\mu_i(\omega)$ ist Teilmenge von $\{a_j(\omega') \in A_j \mid \omega' \in P_i(\omega)\} \quad j \neq i$

iii) weiß jeder, dass der andere auch rational ist; für alle $\omega' \in P_i(\omega)$ ist $a_j(\omega)$ beste Antwort auf $\mu_j(\omega) \quad j \neq i$

Dann ist die gemischte Strategie $(\alpha_1, \alpha_2) = (\mu_2(\omega), \mu_1(\omega))$ ein gemischte Strategie Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Sei a_i' eine Strategie von Spieler i, die im Träger von $\alpha_i = \mu_j(\omega)$. Dann existiert nach ii) ein Zustand $\omega' \in P_j(\omega)$, so dass $a_i(\omega) = a_i'$. Nach iii) folgt, dass a_i' beste Antwort auf $\mu_i(\omega')$, welches nach i) gleich $\mu_i(\omega)$ ist. □

In beiden vorangegangenen Propositionen kann die Voraussetzung, dass das Spiel gemeinsames Wissen ist, abgeschwächt werden. In Proposition 2 reicht es anzunehmen, dass jeder Spieler seine eigenen Strategien und Präferenzen kennt. Im anderen Fall, Proposition 3, ist es genügend, dass das Spiel beidseitiges Wissen ist. Abschließend lässt sich sagen, dass das Wissen der Spieler über das Spiel selbst, die anderen Spieler oder sogar das Wissen der anderen Spieler, einen Entscheider und den Ausgang des Spiels sehr stark beeinflussen kann. Hierzu wäre es interessant sich das *Electronic Mail Game* zur Verdeutlichung anzusehen.

4 Quellen

A Course in Game Theory,Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein