Das sequentielle Gleichgewicht

Seminarvortrag

von
Florian Lasch

Dozent: Prof. Dr. Matthias Löwe
Seminar: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Münster, Juni 2012

1 Einleitung

Das sequentielle Gleichgewicht ist eine Verfeinerung des Nashgleichgewichts in extensiven Spielen mit unvollständiger Information. Die Spieler können auf Unsicherheiten, die durch die unvollständige Information hervorgerufen werden, reagieren, indem sie Vermutungen anstellen. Das sequentielle Gleichgewicht beinhaltet diese Vermutungen und verfeinert so das Nashgleichgewicht und insbesondere auch das teilspielperfekte Gleichgewicht. Dieser Vortrag führt die nötigen Begriffe und Grundkonzepte für dieses Gleichgewicht ein und abschließend wird die Existenz von sequentiellen Gleichgewichten in einer eingeschränkten Klasse von extensiven Spielen mit unvollständiger Information bewiesen. Dafür schränken wir uns im Folgenden auf endliche Spiele mit perfekter Erinnerung ein, die durch eine Nutzenfunktion induzierte Präferenzrelation haben. Darüber hinaus betrachten wir wegen der Ausgang-Äquivalenz, die im vorigen Vortrag gezeigt wurde, nur Verhaltensstrategievektoren in den Spielen.

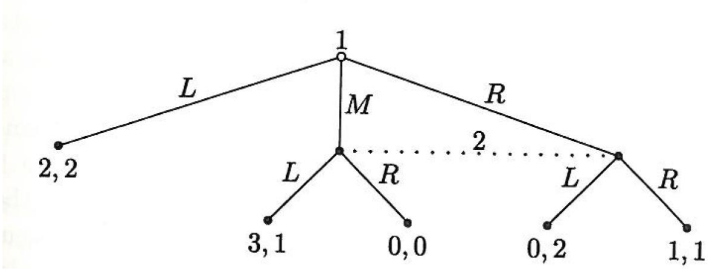
2 Sequentielles Gleichgewicht

Spiele mit unvollständiger Information modellieren eine Form der Unsicherheit der Spieler. Die Spieler wissen auf ihren Informationsmengen nicht immer, welcher Verlauf zu der Informationsmenge geführt hat. Diese Unsicherheit veranlasst die Spieler, Vermutungen über den bisherigen Spielverlauf anzustellen. In diesem Kapitel werden solche Vermutungen modelliert und es wird ein Lösungskonzept für endliche extensive Spiele mit unvollständiger Information eingeführt, das diese Vermutungen beinhaltet. Ausgehend von Beispielen sollen die Definitionen und Ideen motiviert werden.

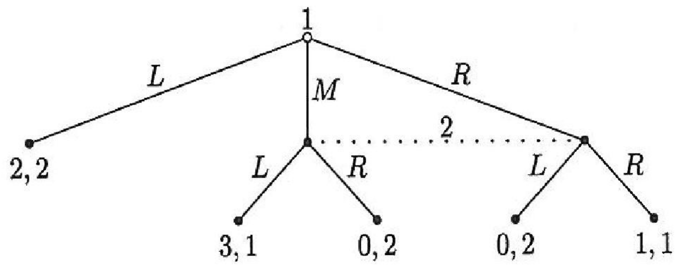
Definition 2.1. *Ein Verhaltensstrategievektor β heißt Nashgleichgewicht, falls für alle Spieler i und alle Verhaltensstrategien $\tilde{\beta}_i$ von Spieler i gilt:*

$$O(\beta) \succeq_i O(\beta_{-i}, \tilde{\beta}_i)$$

Die beiden Spiele mit unvollständiger Information in Beispiel 1 und 2 unterscheiden sich nur in der Nutzenfunktion. In den Beispielen ist $I_2 = \{M, R\}$ die einzige Informationsmenge von Spieler 2. Im ersten Beispiel wird die Strategie R von Spieler 2 durch L dominiert (L führt nie zu einem schlechteren Ergebnis als R), daher ist die Unsicherheit, welcher Verlauf zur Informationsmenge I_2 geführt hat, für Spieler 2 unwichtig. Unabhängig von seinen Vermutungen ist es optimal für Spieler 2, immer die Strategie L zu wählen. In diesem Spiel ist der Strategievektor (M, L) ein Nashgleichgewicht. Weiter ist aber auch der Strategievektor (L, R) ein Nashgleichgewicht. Dieses ist wegen der dominanten Strategie L von Spieler 2 allerdings nicht sehr glaubwürdig.



Beispiel 1: Hier ist die Unsicherheit von Spieler 2 in I_2 noch nicht relevant



Beispiel 2: Um eine optimale Strategie zu finden, muss Spieler 2 Vermutungen darüber anstellen, was zu I_2 geführt hat

In Beispiel 2 hat Spieler 2 allerdings keine dominierende Strategie. Vielmehr hängt es davon ab, wo er sich in seiner Informationsmenge befindet, was seine beste Strategie wäre. Daher ist es für Spieler 2 naheliegend, Vermutungen (Beliefs) darüber aufzustellen, welcher Verlauf zu I_2 geführt hat. Nimmt Spieler 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.5 an, dass Spieler 1 M gespielt hat, ist R die optimale Strategie. Vermutet er allerdings eine Wahrscheinlichkeit von höchstens 0.5, so ist L seine optimale Strategie. Dies zeigt, dass die Lösung eines extensiven Spiels mit unvollständiger Information nicht nur von den Strategien der Spieler, sondern ebenso von deren Vermutungen über den bisherigen Spielverlauf abhängen kann. Dazu formalisieren wir die Idee der Vermutung durch Beliefs.

Definition 2.2. *Eine Abbildung μ, die jeder Informationsmenge I ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(I)$ auf I zuordnet, heißt Belief-System. Ist I eine Informationsmenge mit P(I)=i, dann heißt $\mu(I)$ Belief von Spieler i in I.*

Definition 2.3. *Ein Paar* (β, μ) *aus einem Verhaltensstrategievektor* β *und einem Belief-System* μ *heißt Assessment.*

In einem endlichen extensiven Spiel können Wahrscheinlichkeiten von Verläufen und Informationsmengen, gegeben ein Verhaltensstrategievektor, berechnet werden:

Definition 2.4. *Es sei* $h = (a_1, ..., a_L)$ *ein Verlauf,* I *eine Informationsmenge und* β *ein Verhaltensstrategievektor. Dann sei* $P^\beta(h)$ *die Wahrscheinlichkeit,* h *unter* β *zu erreichen, und es gilt:*

$$P^\beta(h) = \prod_{k=0}^{L-1} \beta_{P(a_1,...,a_k)}(a_1, ..., a_k)(a_{k+1})$$

$P^\beta(I)$ *sei die Wahrscheinlichkeit,* I *unter* β *zu erreichen, und es gilt:*

$$P^\beta(I) = \sum_{h \in I} P^\beta(h)$$

Definition 2.5. *Ein Verhaltensstrategievektor* β *heißt vollständig gemischt, falls für jede Informationsmenge* I *und jede mögliche Handlung* $a \in A(I)$ *gilt:* $\beta(I)(a) > 0$*. Insbesondere ist dann* $P^\beta(h) > 0$ *für jeden Verlauf* h*.*

Als Belief-Systeme sollen keine beliebigen Wahrscheinlichkeitsmaße zugelassen werden, sondern die Beliefs sollen in irgendeiner Form aus dem Spiel abgeleitet sein. Das Konzept der Konsistenz schränkt die zulässigen Assessments ein und bezieht sich immer auf ein festes Paar aus einem Verhaltensstrategievektor und einem Beliefsystem, die auf bestimmte Weise zueinander passen sollen.

Definition 2.6. *Das Assessment* (β, μ) *heißt konsistent, falls es eine Folge* $((\beta^n, \mu^n))_{n \in \mathbb{N}}$ *von Assessments gibt, sodass gilt:*

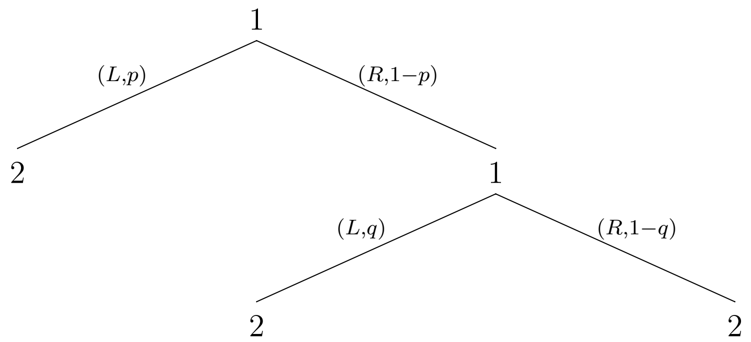
1. $\beta^n(I)$ *und* $\mu^n(I)$ *konvergieren für alle Informationsmengen* I *schwach gegen* $\beta(I)$ *und* $\mu(I)$

2. $\beta^n(I)(a) > 0 \quad \forall I$ *Informationsmenge,* $\forall a \in A(I)$

3. *Für einen Verlauf* h *und eine Informationsmenge* I *ist* $\mu^n(I)(h) = \frac{\beta^n(h)}{\beta^n(I)}$

Insbesondere gibt es für einen vollständig gemischten Strategievektor β genau ein Belief-System μ, sodass (β, μ) konsistent ist. Da β vollständig gemischt ist, kann man mit der Regel von Bayes μ eindeutig aus β ableiten.

Um die Idee des Ableitens der Beliefs aus den Strategievektoren und Regel von Bayes zu verdeutlichen, betrachten wir das Spiel in Beispiel 3, in dem nur Spieler 1 handelt und Spieler 2 Vermutungen anstellt. Man kann es als Teilspiel eines größeren Spiels auffassen, in dem Spieler 2 nach den Verläufen L, (R, L) und (R, R) handeln muss, sodass es plausibel ist, dass Spieler 2 überhaupt Vermutungen anstellt. Die Notation an den Pfaden ist folgendermaßen zu verstehen: (L, p) bedeutet, dass der Spieler die Handlung L spielt mit der Wahrscheinlichkeit p. Dies soll die Strategie β von Spieler 1 veranschaulichen. Formal ist β definiert: $\beta(\emptyset)(L) = p$, $\beta(\emptyset)(R) = 1 - p$, $\beta(R)(L) = q$ und $\beta(R)(R) = 1 - q$ mit $p, q \in (0, 1)$.



Beispiel 3: Das Ableiten der Beliefs aus einer vollständig gemischten Strategie

Die Informationsmenge I von Spieler 2 bestehe aus den beiden Verläufen L und (R, L), also I= $\{L, (R, L)\}$. Dann ist die Vermutung $\mu(I)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{L, (R, L)\}$. $\mu(I)$ soll mit der Regel von Bayes aus β abgeleitet werden. Damit ergibt sich für $\mu(I)(L)$:

$$\mu(I)(L) \quad = \frac{P^\beta(L)}{P^\beta(I)} = \frac{P^\beta(L)}{P^\beta(L)+P^\beta((R,L))} = \frac{p}{p+(1-p)q}$$

Und ebenso ergibt sich für $\mu(I)(b)$:

$$\mu(I)((R, L)) \quad = \frac{P^\beta((R,L))}{P^\beta(I)} = \frac{P^\beta((R,L))}{P^\beta(L)+P^\beta((R,L))} = \frac{q(1-p)}{p+(1-p)q}$$

Soll das Paar (μ, β) konsistent sein, so determiniert die Anwendung der Regel von Bayes schon die Vermutung μ, da p und q aus $(0, 1)$ sind und damit β vollständig gemischt ist. Wären p und q gleich null, könnte man die Regel von Bayes nicht anwenden, da dann $P^\beta(I) = 0$ wäre.

In extensiven Spielen mit vollständiger Information ist das Konzept der Teilspielperfektheit die zentrale Erweiterung des Nashgleichgewichts. Für jeden Verlauf kann man das nach diesem Verlauf auftretende Teilspiel als Spiel auffassen. Ein Nashgleichgewicht ist dann teilspielperfekt, wenn es Nashgleichgewicht in jedem der Teilspiele ist. Diese Idee lässt sich prinzipiell auch in Spielen mit unvollständiger Information anwenden. Teilspiele können sinnvollerweise jedoch nicht an mehrelementigen Informationsmengen beginnen, daher gibt es möglicherweise in extensiven Spielen mit unvollständiger Information nur wenige oder keine echten Teilspiele. In dem Ausgangsbeispiel dieses Kapitels ist das einzige Teilspiel das gesamte Spiel, sodass die Verfeinerung des Nashgleichgewichts zu Teilspielperfektheit hier keine stärkere Forderung ist. Die dazu analoge Idee in extensiven Spielen mit unvollständiger Information ist die sequentielle Rationalität. Ein Assessment heißt sequentiell rational, wenn die Strategie eines Spielers an jedem seiner Informationsmengen, gegeben seinen Beliefs, optimal ist. Dazu werden wieder Wahrscheinlichkeitsmaße auf der Menge der terminalen Verläufe verglichen. Der bedingte Ausgang soll die aus der Strategie und den Beliefs resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Z sein.

Definition 2.7. *Der Ausgang $O(\beta, \mu|I)$ von (β, μ) bedingt unter I das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge der abgeschlossenen Verläufe, das aus (β, μ) unter der Bedingung resultiert, dass man sich in I befindet. Für alle abgeschlossenen Verläufe h mit Teilverlauf $\tilde{h} = (a_1, ..., a_L)$ in I sei also:*

$$O(\beta, \mu|I)(h) = \mu(I)(\tilde{h}) \prod_{k=L}^{K-1} \beta_{P(a_1,...,a_k)}(a_1, ..., a_k)(a_{k+1})$$

Falls h keinen Teilverlauf in I hat, so sei $O(\beta, \mu|I)(h) = 0$.

Bei der Berechnung von $O(\beta, \mu|I)(h)$ ist die Wohldefiniertheit erst einmal nicht klar, da der Teilverlauf $\tilde{h}$ möglicherweise nicht eindeutig ist. Im Allgemeinen wäre dies nicht wohldefiniert, in Spielen mit perfekter Erinnerung ist die Wohldefiniertheit allerdings erfüllt. Anschaulich kann man dies folgendermaßen einsehen: Gäbe es einen weiteren von $\tilde{h}$ verschiedenen Teilverlauf $\grave{h}$ von h, der in I liegt, so sei ohne Einschränkung die Länge von $\tilde{h}$ größer als die von $\grave{h}$. Dann durchläuft $\tilde{h}$ zweimal die Informationsmenge I. Spieler $P(I)$ weiß dann beim zweiten Erreichen wegen der perfekten Erinnerung, welchen Pfad er beim ersten Erreichen von I gewählt hat. Nach der Struktur des Spiels weiß Spieler $P(I)$ aber wiederum nicht, auf welchem Verlauf er zur Informationsmenge I gekommen ist. Das ist ein Widerspruch und damit gibt es höchstens einen solchen Teilverlauf $\tilde{h}$ von h. Mit dieser Definition können wir formulieren, was es bedeutet, dass die Verhaltensstrategie eines Spielers, gegeben seinem Belief, ab einem Informationsbezirk optimal sein soll, und was ein Nashgleichgewicht sein soll:

Definition 2.8. *Das Assessment* (β, μ) *heißt sequentiell rational, falls für jeden Spieler* $i \in N$ *und jeden Informationsbezirk* I_i *von Spieler* i *gilt:*

$$O(\beta, \mu | I_i) \succeq_i O((\beta_{-i}, \beta_i^{'}), \mu | I_i) \quad \forall \ \beta_i^{'} \text{ Verhaltensstrategie von Spieler } i$$

Damit kann man ein sequentielles Gleichgewicht definieren. Ein sequentielles Gleichgewicht soll ein konsistentes Assessment (β, μ) sein, sodass die Strategie β_i von Spieler i, bedingt unter einem Informationsbezirk I, optimal ist für jede Informationsmenge I von Spieler i.

Definition 2.9. *Ein Assessment* (β, μ) *heißt genau dann sequentielles Gleichgewicht, wenn es sequentiell rational und konsistent ist.*

Um festzustellen, unter welchen Bedingungen sequentielle Gleichgewichte existieren, wird im folgenden Kapitel ein weiterer Gleichgewichtstyp entwickelt, der mit dem sequentiellen Gleichgewicht zusammenhängt. Dieser Zusammenhang ermöglicht Aussagen über die Existenz von sequentiellen Gleichgewichten.

3 Perfektes Gleichgewicht

Ein weiteres Konzept, um das Nashgleichgewicht zu verfeinern, ist die Perfektheit. Die Grundidee ist dabei, dass Spieler Fehler machen und so von ihrer Gleichgewichtsstrategie minimal abweichen. Ein Gleichgewicht heißt perfekt, wenn es in gewisser Weise robust gegen diese kleinen Fehler ist. Die Gleichgewichtsstrategie eines Spielers soll nicht nur für die Gleichgewichtsstrategien der anderen Spieler, sondern auch für die leicht gestörten Gleichgewichtsstrategien der anderen Spieler (wenn sie Fehler machen) die optimale Antwort sein. Diese Idee modellieren wir zuerst für strategische Spiele und werden dann die Definiton für extensive Spiele auf strategische Spiele zurückführen.

Im Folgenden werden drei mögliche Definitionen für Perfektheit vorgestellt, die jeweils eine andere Charakterisierung von Perfektheit darstellen. Dann zeigen wir allerdings, dass die Definitionen äquivalent und damit nur unterschiedliche Sichtweisen auf den gleichen Sachverhalt sind.

Dazu modellieren wir die Grundidee der Fehler durch ϵ-gestörte Spiele. In dem ϵ-gestörten Spiel eines Ursprungsspiels müssen die Spieler jede ihrer möglichen reinen Strategien mit einer Mindestwahrscheinlichkeit wählen, die man als minimalen Fehler interpretieren kann. In einem ϵ-gestörten Spiel ist dieser Zwang für jede Strategie höchstens ϵ, sodass man das Ursprungsspiel als Folge von ϵ-gestörten Spielen erhalten kann, wenn ϵ gegen 0 geht.

Definition 3.1. *Es sei G=$\langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ ein strategisches Spiel, wobei A_i die Menge der reinen Strategien von Spieler i ist, und sei $\epsilon > 0$. Weiter gebe es $\epsilon_i^{a_i}$ mit $0 < \epsilon_i^{a_i} < \epsilon$ für alle a_i in A_i und $\sum\limits_{a\in A_i} \epsilon_i^{a_i} < 1$ $\forall i \in N$. Dann definiert man das ϵ-gestörte Spiel G^ϵ folgendermaßen:*

$G^\epsilon = \langle N, (\triangle A_i^\epsilon)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ wobei $\triangle A_i^\epsilon = \{p \in \triangle(A_i) | p(a) \geq \epsilon_i^a \quad \forall a \in A_i\}$

Weil die $\epsilon_i^{a_i}$ in der Definition nicht eindeutig von dem ϵ abhängen, sind ϵ-gestörte Spiele nicht eindeutig bestimmt. An dieser Stelle sind für uns ausschließlich Folgen von ϵ-gestörten Spielen wichtig, in denen das ϵ gegen null konvergiert. Daher ist nur entscheidend, dass das ϵ die Mindestwahrscheinlichkeit für jede reine Strategie (die Fehler) immer kleiner werden lässt, sodass im Grenzwert wieder beliebige Strategien erlaubt sind. Insbesondere existiert für endliche Spiele immer ein ϵ-gestörtes Spiel, falls ϵ klein genug ist.

Mit den ϵ-gestörten Spielen können wir die Definition von perfekten Gleichgewichten vornehmen.

Definition 3.2. *Es sei G=$\langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ ein endliches strategisches Spiel und $\epsilon > 0$. Der Strategievektor σ^ϵ ist ein ϵ-gestörtes Gleichgewicht, falls er in einem ϵ-gestörten Spiel Nashgleichgewicht ist.*

Definition 3.3. *Es sei G=$\langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Der Strategievektor σ ist genau dann ein perfektes Gleichgewicht, falls es eine Folge ϵ-gestörter Gleichgewichte σ^ϵ gibt, die für $\epsilon \to 0$ gegen σ konvergiert.*

Damit können wir die Existenz von perfekten Gleichgewichten in endlichen strategischen Spielen beweisen:

Satz 3.4. *Jedes endliche strategische Spiel G=$\langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ besitzt ein perfektes Gleichgewicht.*

Beweis. Betrachte eine Folge ϵ-gestörter Spiele $G^\epsilon = (N, \bigotimes_{i\in N}(\triangle A_i^\epsilon), (u_i)_{i\in N})$, wobei ϵ gegen null konvergiert. Es gilt nun, dass $\triangle A_i^\epsilon$ kompakt und konvex ist und die Präferenzrelation des erwarteten Nutzens stetig und quasi-konkav ist. Daher folgt, dass $G^\epsilon = (N, \bigotimes_{i\in N}(\triangle A_i^\epsilon), (u_i)_{i\in N})$ ein Nashgleichgewicht σ^ϵ in reinen Strategien besitzt. Da die reinen Strategien in G^ϵ gemischte Strategien in G sind, ist σ^ϵ ein Element von $\bigotimes_{i\in N} \triangle(A_i)$ für jedes ϵ. Damit ist σ^ϵ ein ϵ-gestörtes Gleichgewicht für jedes ϵ. Betrachte also die Folge $(\sigma^\epsilon)_{\epsilon\to 0}$. Es gilt ebenfalls, dass $\triangle(A_i)$ kompakt ist. Da N endlich ist, ist damit auch $\bigotimes_{i\in N} \triangle(A_i)$ kompakt. Wegen der Kompaktheit gibt es eine konvergente Teilfolge $(\sigma^{\epsilon'})_{\epsilon'}$ von $(\sigma^\epsilon)_\epsilon$ mit Grenzwert σ in $\bigotimes_{i\in N} \triangle(A_i)$. Damit ist σ nach Definition A ein perfektes Gleichgewicht und es existiert in G ein perfektes Gleichgewicht. □

Um die Definition von perfekten Gleichgewichten von strategischen Spielen auf extensive Spiele mit unvollständiger Information zu erweitern, betrachten wir die Agentennormalform eines extensiven Spiels. Dabei wird aus einem extensiven Spiel ein strategisches Spiel. In der Agentennormalform wird jede Informationsmenge I eines jeden Spielers i zu einem eigenständigen Spieler, dem Agenten (i, I) des Spielers i. Alle Agenten eines Spielers haben die gleiche Präferenzrelation, handeln aber unabhängig voneinander. Die Handlungsmenge des Agenten (i, I) ist A(I). Eine Verhaltensstrategie eines Spielers im Ursprungsspiel ist dann ein Vektor von gemischten Strategien aller Agenten des Spielers. So modelliert man die Idee, dass die Spieler an jeder ihrer Informationsmengen unabhängig von anderen Informationsbemengen Fehler machen. Dann kann man Perfektheit von der Agentennormalform auf das extensive Spiel übertragen, indem man definiert, dass das Ursprungsspiel genau dann perfekt ist, wenn die Agentennormalform des Spiels perfekt ist.

Definition 3.5. *Die Agentennormalform eines endlichen extensiven Spiels mit unvollständiger Information* $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ *ist das strategische Spiel* $G{=}\langle \tilde{N}, (B_{(i,I)})_{(i,I)\in\tilde{N}}, (u_{(i,I)})_{(i,I)\in\tilde{N}}\rangle$*, wobei gilt:*

- $\tilde{N} = \{(i, I)|i \in N, I \in \mathcal{I}_i\}$
- $B_{(i,I)} = A(I)$
- $u_{(i,I)}(\alpha) = u_i(\alpha)$ *für alle* $I \in \mathcal{I}_i$ *und Strategievektoren gemischter Strategien* α *in* G

Die Verhaltensstrategievektoren β in Γ lassen sich bijektiv auf die Strategievektoren gemischter Strategien in G abbilden. Die Bijektion bildet dabei einen Verhaltensstrategievektor β in Γ auf den Strategievektor gemischter Strategien $\alpha = (\beta_1(I_{1_1}), ..., \beta_1(I_{1_{k_1}}), \beta_2(I_{2_1}), ..., \beta_2(I_{2_{k_2}}), ..., \beta_N(I_{N_{k_N}}))$ ab. Dann heißt α der zu β assoziierte Strategievektor gemischter Strategien und β heißt der zu α assoziierte Verhaltensstrategievektor. Die Gleichung $u_{(i,I)}(\alpha) = u_i(\alpha)$ ist somit eine Kurzschreibweise für die Forderung: $u_{(i,I)}(\alpha) = u_i(\beta)$ für β in Γ zu α in G assoziiert.

Definition 3.6. *Der Verhaltensstrategievektor* β *in einem extensive Spiel ist genau dann ein perfektes Gleichgewicht, wenn der zu* β *assoziierte Strategievektor gemischter Strategien in der Agentennormalform ein perfektes Gleichgewicht ist.*

Damit haben wir eine Verbindung zwischen extensiven Spielen und strategischen Spielen hergestellt und daraus eine Verbindung zwischen den verschiedenen Gleichgewichten abgeleitet. Wir zeigen, dass perfekte Gleichgewichte in folgendem Sinn stärker sind als sequentielle Gleichgewichte: Jedes perfekte Gleichgewicht in einem extensiven Spiel mit unvollständiger Information lässt sich mit einem Belief-System zu einem sequentiellen Gleichgewicht erweitern.

Satz 3.7. *Zu jedem perfekten Gleichgewicht β eines endlichen extensiven Spiels mit unvollständiger Information und perfekter Erinnerung gibt es ein Belief-System μ, sodass (β, μ) ein sequentielles Gleichgewicht des Spiels ist.*

Abschließend kann man aus der Existenz von perfekten Gleichgewichten und dem Zusammenhang zwischen sequentiellen und perfekten Gleichgewichten die Existenz von sequentiellen Gleichgewichten in endlichen Spielen mit perfekter Erinnerung ableiten:

Satz 3.8. *Jedes endliche extensive Spiel mit unvollständiger Information und perfekter Erinnerung besitzt ein sequentielles Gleichgewicht.*

Beweis. Nach Satz 3.4 besitzt jedes endliche extensive Spiel mit unvollständiger Information und perfekter Erinnerung ein perfektes Gleichgewicht β. Nach Satz 3.7 gibt es zu diesem ein Belief-System μ, sodass (β, μ) ein sequentielles Gleichgewicht ist. □