Der Ergodensatz

Hendrik Hülsbusch

10.4.2012

Inhaltsverzeichnis

4 Einleitung

In meinem Vortrag beschäftigen wir uns mit dem asymptotischen Verhalten von Markovketten, sprich, wie verhält sich $\mu^{(n)}$ für große n für eine beliebige Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$. Es leuchtet sofort ein, dass in den meisten Fällen die Markovkette $(X_n)_{n\in N}$ selbst nicht konvergieren wird, da die Folgeglieder fortwährend zwischen verschiedenen Zuständen hin und her wechseln werden. Allerdings lohnt es sich zu untersuchen, ob die Verteilung der X_n, die bestimmt mit welchen Wahrscheinlichkeiten die jeweiligen Zustände angenommen werden, konvergiert. Im Folgenden werden wir hierfür immer voraussetzen, dass die Markovkette $(X_n)_{n\in N}$ irreduzibel und aperiodisch ist.
Der Grund dafür ist der, dass es für reduzible oder periodische Markovketten im allgemeinen keine Aussagen von Konvergenz beliebiger Anfangsverteilungen $\mu^{(0)}$ gegen eine universelle Verteilung π gibt. Zwei Beispiele hierfür sehen wir nach einer kleinen

Erinnerung:

- irreduzibel bedeutet:
  Für alle Zustandspaare $s_i, s_j \in S$ gibt es M $\in \mathbf{N}$ mit $(P^M)_{i,j} > 0$.
  Es ist also immer *möglich* von einem beliebigen Zustand in jeden anderen beliebigen zu wechseln. Man muss nur genügend viele Schritte gehen.

- aperiodisch bedeutet:
  Falls die Zustände die Indizes $\{1, \ldots, k\}$ haben, gilt

  $$ggT\{n \geq 1 | (P^n)_{i,i} > 0\} = 1 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}$$

  Die Markovkette springt also nicht systematisch zu bestimmten Zeitpunkten zurück zu einem Zustand.

Ein Beispiel für eine reduzible Markovkette ohne universellen Grenzwert für $(\mu^{(n)})_{n\in N}$ ist

Abbildung 4.1:

mit Übergangsmatrix

$$\text{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist unschwer zu erkennen, dass für die Anfangsverteilung $\mu^{(0)} = (0, 1, 0) = \mu^{(n)}$ und weiter für die Anfangsverteilung $\mu^{(0)} = (0, 0, 1) = \mu^{(n)}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Es gibt also keinen universellen Grenzwert π.

Ein Beispiel für eine periodische Markovkette für die $(\mu^{(n)})_{n\in N}$ nicht für jede Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ konvergiert ist

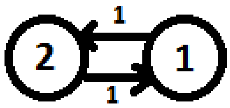

Abbildung 4.2:

mit Übergangsmatrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Denn falls $\mu^{(0)} = (1, 0)$ gilt dann folgt

$$\mu^{(n)} = \begin{cases} (1,0) \text{ , falls n gerade} \\ (0,1) \text{ , falls n ungerade} \end{cases}$$

Also konvergiert $(\mu^{(n)})_{n\in N}$ nicht.

Das Untersuchen von Verteilungskonvergenz führt uns zur Idee der stationären Verteilungen. Damit sind solche Verteilung π gemeint für die $\pi P = \pi$ gilt. Wir werden im ersten Teil des Vortrags zeigen, dass jede aperiodische, irreduzible Markovkette genau eine stationäre Verteilung π besitzt und jede Folge von Verteilungen $(\mu^{(n)})_{n\in N}$ mit beliebigen $\mu^{(0)}$ gegen diese konvergiert, es gilt dann also $\mu^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$. Im zweiten Teil werden wir dann den Begriff der Reversibilität einführen, anhand derer das bewiesene verdeutlicht werden soll.

5 Stationäre Verteilungen

Definition 5.1 *Sei $(X_n)_{n\in N}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Eine Verteilung $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ heißt stationäre Verteilung der Markovkette falls gilt:*

$$\pi P = \pi, \text{ also } \pi_j = \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, k\}$$

Bemerkung: Die definierte Eigenschaft sorgt dafür, dass die Verteilung nach jedem Schritt die gleiche ist, daher

$$\text{mit } \mu^{(0)} = \pi \text{ ist } \mu^{(n)} = \pi \text{ für alle } n \in \mathbf{N}$$

Weiter fällt auf, dass die stationäre Verteilung π nur von der Matrix P abhängt.
Genauer: π ist linker Eigenvektor von P zum Eigenwert 1. Deswegen spricht man auch oft von "π ist stationär für die Matrix P".
Im Folgenden werden wir uns auf drei zentrale Probleme konzentrieren: Die Existenz von stationären Verteilungen, die Eindeutigkeit von stationären Verteilungen und die Konvergenz von Verteilungsfolgen $\mu^{(n)}$ mit beliebigem $\mu^{(0)}$ gegen die stationäre Verteilung π.
Wenden wir uns nun dem ersten Problem zu.

Theorem 5.1 (Existenz von stationären Verteilungen) *Für jede irreduzible und aperiodische Markovkette existiert mindestens eine stationäre Verteilung.*

Um dieses Theorem beweisen zu können benötigen wir nächst noch ein weiteres Lemma und eine Definition. Beide beschäftigen sich mit Ersteintrittszeiten von Markovketten.

Definition 5.2 *Für eine Markovkette $(X_n)_{n\in N}$ mit Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ Übergangsmatrix P und Anfangszustand $X_0 = s_i$ ist die Ersteintrittszeit $T_{i,j}$ definiert als*

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 1 | X_n = s_j\}$$

mit $T_{i,j} = \infty$, falls s_j niemals getroffen wird. Weiter bezeichnet

$$\tau_{i,j} = \mathbb{E}[T_{i,j}]$$

die mittlere Ersteintrittszeit.

Lemma 5.1 *Für jede irreduzible, aperiodische Markovkette* $(X_n)_{n\in N}$ *mit Zustandsraum* $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ *und Übergangsmatrix* P *gilt*

1. $\mathbf{P}(T_{i,j} < \infty) = 1$ für alle i,j
2. $\mathbb{E}[T_{i,j}] < \infty$ für alle i,j

Bemerkung Dieses Lemma ist nicht weiter verwunderlich, wenn man sich die Definition von irreduzibel in Erinnerung ruft.

Um dieses Lemma zu Beweisen benötigt man Lemma 2.9 aus dem letzten Vortrag. Allerdings fehlt für den Beweis die Zeit.

Kommen wir nun zu

Beweis von Theorem 5.1 Sei $(X_n)_{n\in N}$ eine irreduzible, aperiodische Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Weiter nehmen wir $X_0 = s_1$ an und definieren uns dann für $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\rho_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_i, T_{1,1} > n)$$

Damit ist ρ_i die erwartete Anzahl von Auftreten von Zustand s_i bis zum Zeitpunkt $T_{1,1}$ und es gilt, wie man direkt verifiziert, $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = \mathbb{E}[T_{1,1}] \overset{Lemma\ 5.1}{<} \infty$. Weiter gilt $\rho_1 = 1$, da s_1 nur zweimal bis zum Zeitpunkt $T_{1,1}$ nur zweimal auftaucht - einmal zum Zeitpunkt 0 und zum zweiten mal zum Zeitpunkt $T_{1,1}$. Zudem zählt ρ_1 nach Konstruktion nur ersteres.

Behauptung $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) = (\frac{\rho_1}{\tau_{1,1}}, \frac{\rho_2}{\tau_{1,1}}, \ldots, \frac{\rho_k}{\tau_{1,1}})$ ist eine stationäre Verteilung.

Beweis Im folgenden werden wir zeigen, dass π die nötigen Eigenschaften besitzt.

1. π ist natürlich eine Verteilung, denn $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = \mathbb{E}[T_{1,1}]$ und $\pi_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
2. Zu zeigen $\pi_j = \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j}$.
   Sei zunächst j $\neq$ 1. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \frac{\rho_j}{\tau_{1,1}} \\
&\overset{Def.}{=} \tfrac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_j, T_{1,1} > n) \\
&\overset{j \neq 1, X_0 = s_1}{=} \tfrac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_j, T_{1,1} > n) \\
&\overset{j \neq 1}{=} \tfrac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_j, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, X_n = s_j, T_{1,1} > n-1) \\
&= \frac{1}{\tau_{1,1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1)\, \underbrace{\mathbf{P}(X_n = s_j | X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1)}_{=P_{i,j}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \tfrac{\rho_i}{\tau_{1,1}} P_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j}
\end{aligned}$$

Das drittletzte Gleichheitszeichen folgt, da $j \neq 1$ und $\{T_{1,1} > n-1\}$ nur von $X_0, \ldots, X_{n-1}$ abhängt und da X_n nur von X_{n-1} abhängt.
Sei nun $j = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= 1 \\
&\overset{Lemma\ 5.1}{=} \mathbf{P}(T_{1,1} < \infty) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_{1,1} = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1)\, \underbrace{\mathbf{P}(X_n = s_1 | X_{n-1} = s_i, T_{1,1} > n-1)}_{P_{i,1}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} P_{i,1} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = s_i, T_{1,1} > n)}_{=\rho_i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \rho_i P_{i,1}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also πP=π und π ist tatsächlich eine stationäre Verteilung.

$\square$

Nun erklären wir, wie wir den Abstand zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen messen wollen, um dann von Konvergenz sprechen zu können.

Definition 5.3 *Falls $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ und $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ sind, dann ist der Totalvariationsabstand zwischen μ und ν definiert als*

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} |\mu_i - \nu_i|$$

Falls $(\nu_n)_{n \in N}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S ist, dann konvergiert ν_n in Totalvariation gegen ν, geschrieben $\nu_n \xrightarrow{TV} \nu$, falls $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(\nu_n, \nu) = 0$ gilt.

Theorem 5.2 (Der Ergodensatz) *Sei $(X_n)_{n \in N}$ eine irreduzible aperiodische Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, Übergangsmatrix P und beliebiger Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$. Dann gilt für jeder stationäre Verteilung π von P*

$$\mu_n \xrightarrow{TV} \pi$$

mit $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$. Insbesondere ist π eindeutig.

Beweis Starten wir den Beweis mit einem kleinem Gedankenexperiment Angenommen:

- Es gibt $(X'_n)_{n \in N}, (X''_n)_{n \in N}$ irreduzible, aperiodische Markovketten mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P, so dass $X''_0 \sim \mu^{(0)}, X'_0 \sim \pi$, wobei π stationär für P ist.
- $(X'_n)_{n \in N}$ und $(X''_n)_{n \in N}$ sind ab Zeit T identisch und $\mathbf{P}(T = \infty) = 0$

dann würde folgen

$$\begin{aligned} |\mu_i^{(n)} - \pi_i| &= |\mathbf{P}(\mathrm{X}''{}_n = s_i) - \mathbf{P}(X'_n = s_i)| \\ &\leq \mathbf{P}(X''_n = s_i, X'_n \neq s_i) + \mathbf{P}(X''_n \neq s_i, X'_n = s_i) \\ &\leq \mathbf{P}(X''_n \neq X'_n) \\ &\leq \mathbf{P}(T > n) \end{aligned}$$

Daher wäre dann $\lim_{n\to\infty} |\mu_i^{(n)} - \pi_i| = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und damit $\lim_{n\to\infty} d_{TV}(\mu^{(n)}, \pi) = 0$, was ja zu zeigen ist. Wir hätten damit also das Theorem bis auf die Eindeutigkeit bewiesen.

Machen wir uns also an die nötigen Konstruktionen.

Sei $(X_n)_{n\in N}$ aperiodische, irreduzible Markovkette mit Übergangsmatrix P, Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ und $X_0 \sim \mu^{(0)}$. Sei $(X''_n)_{n\in N}$ wie oben und unabhängig von $(X_n)_{n\in N}$.

Definiere

$$T = \min\{n \geq 1 | X_n \neq X'_n\}$$

Nun ist zu zeigen:

$$\mathbf{P}(T < \infty) = 1$$

Mit Hilfe von Korollar 2.9 aus dem letzten Vortrag sieht man schnell

$$\mathbf{P}(T \leq M) \geq \alpha^2$$

mit M wie im benutzen Korollar und $\alpha > 0$. Daraus folgt dann

$$\mathbf{P}(T > M) \leq (1 - \alpha^2)$$

Von dort kann man induktiv zeigen

$$\mathbf{P}(T > lM) \leq (1 - \alpha^2)^l$$

und bekommt so die Aussage, da damit $\mathbf{P}(T = \infty) = 0$ gilt.

Definiere nun weiter

$$X''_0 = X_0$$

und für jedes n

$$X''_{n+1} = \begin{cases} X_{n+1} \text{ , falls } X''_{n+1} \neq X'_n \\ X'_{n+1} \text{ , falls } X''_{n+1} = X'_n \end{cases}$$

Die Kette $(X''_n)_{n\in N}$ entwickelt sich also exakt wie $(X_n)_{n\in N}$ bis zum Zeitpunkt T wo sich $(X_n)_{n\in N}$ und $(X'_n)_{n\in N}$ treffen. Dannach entwickelt sie sich exakt wie $(X'_n)_{n\in N}$. Es bleibt zu zeigen, dass $(X''_n)_{n\in N}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P ist, es muss also gezeigt werden

$$P_{i,j} = \mathbf{P}(X''_{n+1} = s_j | X''_n = s_i) \text{ für alle } n \in N$$

Daraus folgt dann $X''_n \sim \mu^{(n)}$ für alle $n \in \mathbf{N}$, wegen $X''_0 \sim \mu^{(0)}$ und der Unabhängigkeit von $(X'_n)_{n\in N}$ und $(X_n)_{n\in N}$.
Nun ist aber klar, dass dies bis zum Zeitpunkt $n = T - 1$ gegeben ist, da $(X_n)_{n\in N}$ diese Eigenschaft hat. Das gilt auch ab dem Zeitpunkt $n = T + 1$, da $(X''_n)_{n\in N}$ diese Eigenschaft hat. Der einzige kritische Moment ist also $n = T$. Wir zeigen die Gleichheit also für diesen Fall:

Seien im folgendem $s_{i_{T-1}}, \dots s_{i_0} \in \{1, \dots, k\}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{X}''_{T+1} = s_j | X''_T = s_i) &= \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{P}(X''_{T+1} = s_j, T = t | X''_T = s_i) \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \underbrace{\mathbf{P}(X''_{t+1} = s_j | T = t, X''_t = s_i)}_{P_{i,j}} \mathbf{P}(T = t | X''_T = s_i) \\
&= P_{i,j}
\end{aligned}$$

Nun haben wir alles gezeigt, was wir in unserem Gedankenexperiment benötigten und somit ist das Theorem bis auf die Eindeutigkeit bewiesen.

Die Eindeutigkeit sieht man leicht wie folgt ein.
Angenommen es seien π und π' zwei stationäre Verteilungen für P mit $\pi \neq \pi'$. Setze $\mu^{(0)} = \pi$. Dann gilt $\mu^{(n)} = \pi$ für alle n und mit dem bereits gezeigtem folgt

$$\lim_{n\to\infty} d_{TV}(\mu^{(n)}, \pi') = \lim_{n\to\infty} d_{TV}(\pi, \pi') = 0$$

Das ist ein Widerspruch zu Annahme.

$\square$

Insgesamt haben wir jetzt gezeigt: Falls eine Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist, dann besitzt sie genau eine stationäre Verteilung π und für jede beliebige Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ gilt $\mu^{(n)} \xrightarrow{TV} \pi$.

6 Reversible Markovketten

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns, wie der Titel schon sagt, mit reversiblen Markovketten. Also solchen Ketten bei denen es im gewissen Sinne egal ist, ob wir die Markovkette vorwärts oder rückwärts durchlaufen.

Definition 6.1 *Sei $(X_n)_{n\in N}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf S wird reversibel für die Kette (oder Übergangsmatrix P) genannt, falls für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ gilt*

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}.$$

Eine Markovkette wird reversibel genannt, falls für sie eine reversible Verteilung existiert.

Theorem 6.1 Sei $(X_n)_{n\in N}$ *eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ und Übergangsmatrix P. Wenn π eine reversible Verteilung für $(X_n)_{n\in N}$ ist, dann ist sie schon eine stationäre Verteilung.*

Beweis

1. Das $\pi \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und $\sum\limits_{i=1}^{k} \pi_i = 1$ gilt ist klar da π eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

2. Bleibt zu zeigen $\pi_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j}$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$.

$$\pi_j = \pi_j \underbrace{\sum_{i=1}^{k} P_{j,i}}_{=1} = \sum_{i=1}^{k} \pi_j P_{j,i} \overset{reversibel}{=} \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{i,j}$$

□

Beispiel 6.1 (Irrfahrt auf Graphen) Ein Graph G = (V,E) besteht aus einer Eckenmenge $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ und einer Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_l\}$. Jede Kante verbindet zwei Ecken. Eine Kante die v_i, v_j verbindet wird mit $< v_i, v_j >$ bezeichnet. Zwei Kanten dürfen nicht das gleiche Paar Ecken verbinden. Zwei Ecken sind Nachbarn, fall sie eine gemeinsame Kante haben.
Zum Beispiel hat der Graph

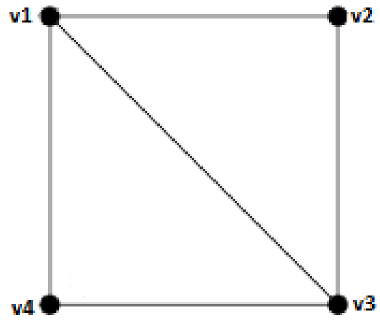

Abbildung 6.1:

die Eckmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und Kantenmenge

$$\text{E} = \{<\text{v}_1, v_2>, <v_1, v_3>, <v_1, v_4>, <v_2, v_3>, <v_3, v_4>\}$$

Ein Irrfahrt auf einem Graph G = (V,E) ist eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ und folgender Übergangsregel: Falls der zufällige Wanderer zum Zeitpunkt n an der Ecke v_i steht, dann bewegt er sich im Zeitpunkt n+1 zu einem Nachbarn von v_i, wobei jeder Nachbar die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.
Die Übergangsmatrix P ist also von folgender Gestalt: Sei d_i die Anzahl der Nachbarn von v_i.

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} \text{ , falls } v_i, v_j \text{ Nachbarn} \\ 0 \text{ , sonst} \end{cases}$$

Es stellt sich heraus, dass

$$\pi = (\tfrac{d_1}{d}, \ldots, \tfrac{d_k}{d})$$

mit $d = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$ eine reversible Verteilung für diese Markovkette ist. Denn es gilt

- Es gilt $\pi \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $\sum\limits_{i=1}^{k} \pi_i = 1$. ✓
- $\pi_i P_{i,j} = \begin{cases} \frac{d_i}{d}\frac{1}{d_i} = \frac{1}{d} = \frac{d_j}{d}\frac{1}{d_j} = \pi_j P_{j,i} \text{ , falls } v_i, v_j \text{ Nachbarn} \\ 0 = \pi_j P_{j,i} \text{ , sonst} \end{cases}$ ✓

Für unseren Beispielgraphen ergibt sich also

$$\pi = (\tfrac{3}{10}, \tfrac{2}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{2}{10})$$

Im Gleichgewicht sind also v_1 und v_3 die wahrscheinlichsten Ecken und v_1 und v_5 die unwahrscheinlichsten.

Als letztes Beispiel wollen wir eine Markovkette betrachten, die nicht reversibel ist aber eine stationäre Verteilung besitzt.

Beispiel 6.3 Betrachte folgenden zufälligen Lauf auf einem Graphen.

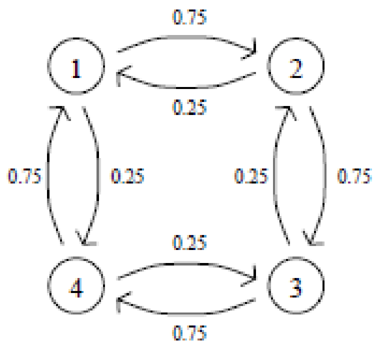

Abbildung 6.2:

Der Läufer läuft also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ im Uhrzeigersinn und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn. Weiter ist die Übergangsmatrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

und $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ist stationär für P, da $\pi P = \pi$. Weiter ist diese Markovkette offensichtlich irreduzibel und π ist schon der einzige stationäre Zustand. Das kann man mit einer Verallgemeinerung von Theorem 5.3 einsehen. Weiter gilt aber

$$\pi_1 P_{1,2} = \frac{1}{4} * \frac{3}{4} = \frac{3}{16} > \frac{1}{16} = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \pi_2 P_{2,1}$$

Also ist π keine reversible Verteilung. Nach Theorem 6.1 ist aber jede reversible Verteilung schon stationär. Also gibt es keine reversible Verteilung für P.
Der Grund für das Fehlen einer reversiblen Verteilung liegt auf der Hand. Der Läufer im Graph läuft tendenziell eher im Uhrzeigersinn.