Seminarvortrag

Extensive Spiele mit perfekter Information

Michael Fleermann

05.06.2012

1 Einführung und Definition

Ein **extensives Spiel** ist eine explizite Beschreibung der sequenziellen Struktur eines Entscheidungsproblems, welchem sich Spieler in strategischen Situationen gegenüber sehen. Im klassischen **strategischen** Spiel war es den Spielern lediglich möglich, am Anfang des Spiels eine einmalige Aktion zu wählen, ohne Kenntnis der Aktionen der anderen Spieler. Ein strategisches Spiel kann also als ein einstufiges Spiel aufgefasst werden. In dieser Sichtweise bildet ein extensives Spiel ein mehrstufiges Spiel, in welchem Spieler auf die Züge der anderen Spieler reagieren können und ggf. mehrere Male im Spiel zum Zug kommen. Hierbei lässt sich unterscheiden, ob ein Spieler zu jedem Zeitpunkt im Spiel den vollständigen Verlauf der Spielzüge aller Spieler kennt oder darüber nur partiell informiert ist. Im ersteren Fall spricht man von **extensiven Spielen mit perfekter Information**, im letzteren Fall von **extensiven Spielen mit imperfekter Information**. In diesem Vortrag wird es um das Modell der extensiven Spiele mit perfekter Information gehen. Das Konzept des Nash-Gleichgewichts wird sich als unbefriedigend herausstellen, weil es die sequenzielle Struktur des Modells nicht beachtet. Es wird deswegen zusätzlich das **teilspielperfekte** Gleichgewicht eingeführt.

Zunächst wollen wir ein Beispiel einführen, an welchem wir alle Konzepte dieses Kapitels in Aktion sehen können.

Beispiel 1.1. Betrachte das folgende dreistufige Spiel γ: Henning (Spieler 1) und Lena (Spieler 2) müssen sich eines Abends entscheiden, was sie machen möchten. Zunächst kann Henning die Entscheidung treffen, ob sie sich zum Schlafen ins Bett legen (B), oder ob sie noch wachbleiben und fernsehen (F). Entscheidet sich Henning für das Bett, endet das Spiel, und beide Spieler erhalten eine Auszahlung in Höhe von 1. Entscheidet sich Henning hingegen für das Fernsehen, so kann nun Lena die Entscheidung treffen, ob sie Wetten Dass (W) oder ein Video (V) schauen. Entscheidet sich Lena für Wetten Dass, endet das Spiel, wobei Lena eine Auszahlung in Höhe von 2, Henning eine Auszahlung in Höhe von 3 erhält. Entscheidet sich Lena jedoch für ein Video, darf Henning in einem letzten Zug bestimmen, ob dies auf Englisch (E) oder Deutsch (D) geschaut wird. Entscheidet er sich für Englisch, erhalten sie beide eine Auszahlung in Höhe von 1. Entscheidet er sich hingegen für Deutsch, erhält Henning eine Auszahlung in Höhe von 2 und Lena eine Auszahlung in Höhe von 3. Diese Entscheidungssitation kann vollständig durch den Spielbaum in Abbildung 1 beschrieben werden.

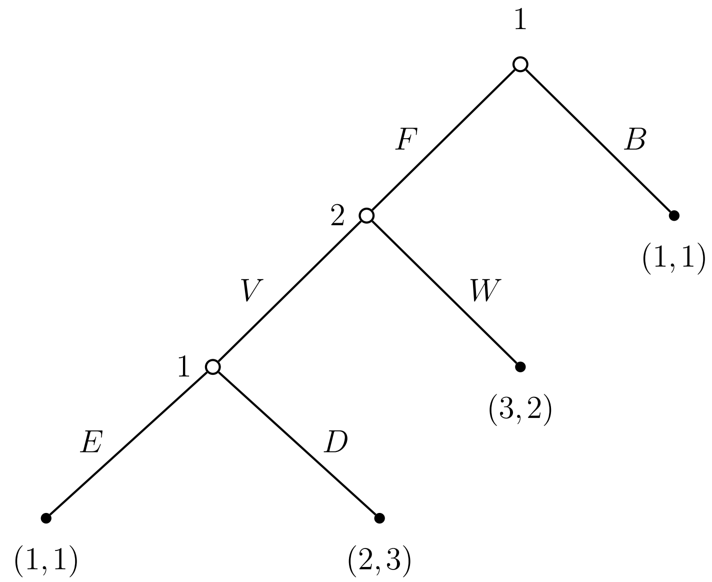

Abbildung 1: Spielbaum des Spiels γ

Es ist zunächst klar, dass es sich hier um ein extensives Spiel mit perfekter Information handelt. Die Spieler handeln nacheinander und können ihre Entscheidung nach der Beobachtung der vorhergehenden Züge treffen. Man kann sich nun fragen, welche Möglichkeiten man besitzt, ein so einfach anmutendes Spiel zu analysieren. Gibt es vielleicht manche Strategien von Henning bzw. Lena, die in einem gewissen Sinne besser sind als andere? Und was ist eigentlich eine Strategie? Wir werden im folgenden alle Konzepte formal definieren und stets auf das Spiel γ anwenden.

Definition 1.2. Ein **extensives Spiel mit perfekter Information** Γ ist ein Quadrupel $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i)_{i \in N})$, wobei gilt:

- N ist die Menge der Spieler
- H ist eine Menge von (endlichen oder unendlichen) Folgen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:
  - Die leere Folge $\emptyset$ ist ein Element von H, also $\emptyset \in H$
  - Ist $(a^1, \ldots, a^K) \in H$, wobei $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $L < K$, dann folgt $(a^1, \ldots, a^L) \in H$. Das heißt mit einer beliebigen Folge ist auch jede **Anfangssequenz** dieser Folge in H. (Sei $(a^1, \ldots, a^K)$ eine beliebige Folge, so heißt eine Folge $(b^1, \ldots, b^L)$ Anfangssequenz von $(a^1, \ldots, a^K)$, falls $L < K$ und $\forall l = 1, \ldots, L : a^l = b^l$).
  - Falls eine unendliche Folge $(a^1, \ldots, a^\infty)$ erfüllt, dass $(a^1, \ldots, a^L) \in H$ für alle $L \in \mathbb{N}$, dann folgt auch $(a^1, \ldots, a^\infty) \in H$

Anmerkungen zur Menge H: Jedes Element von H ist eine Folge, welche man **Verlauf** nennt. Jedes Folgenglied eines Verlaufs ist eine **Spieleraktion**. Ein Verlauf $(a^1, \ldots, a^K) \in H$ heißt **offen**, falls er eine Anfangssequenz eines anderen Verlaufes in H ist. Offene Verläufe sind also stets endlich. Einen Verlauf nennen wir im Folgenden **abgeschlossen**, falls er nicht offen ist. Ein Verlauf ist also genau dann abgeschlossen, falls er unendlich ist, oder falls kein a^{K+1} existiert, sodass $(a^1, \ldots, a^{K+1}) \in H$. Nach abgeschlossenen Verläufen sind also keine weiteren Aktionen mehr vorgesehen. Nach ihnen endet das Spiel. Die Menge aller abgeschlossenen Verläufe bezeichnen wir mit Z. Die Länge eines Verlaufs $h \in H$ geben wir mit $|h|$ an. Es gilt stets $|h| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- P ist eine Funktion, welche jedem offenen Verlauf $h \in H$ einen Spieler $P(h) \in N$ zuordnet. Man nennt P die **Spielerfunktion**. Für offenes $h \in H$ ist $P(h)$ der Spieler, der eine Aktion nach dem Verlauf h ausführt.
- für jeden Spieler $i \in N$ ist $\geq_i$ eine Präferenzrelation auf der Menge der abgeschlossenen Verläufe Z.

Bezeichnungen. Sei $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i)_{i \in N})$ ein extensives Spiel mit perfekter Information, so führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

- Für jeden Spieler $i \in N$ setzen wir $D_i := \{h \in H \backslash Z : P(h) = i\}$ als die Menge derjenigen offenen Verläufe in H, nach welchen Spieler i am Zug ist. Hierbei wird der Fall $D_i = \emptyset$ nicht ausgeschlossen.
- Ist die Menge H aller mögichen Verläufe endlich, so heißt das Spiel endlich.

- Wir bezeichnen mit $\ell(\Gamma) := \sup\{|h| : h \in H\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Länge von Γ. Gilt $\ell(\Gamma) \in \mathbb{N}$, so sagt man, das Spiel habe einen endlichen Horizont. Insbesondere hat jedes endliche Spiel einen endlichen Horizont.

- Sei h ein Verlauf der Länge $k \in \mathbb{N}$, so bezeichnet (h, a) den Verlauf der Länge $k+1$, welcher aus dem Verlauf h gefolgt von der Spieleraktion a besteht. Analog lässt sich h auch durch eine passende Aktionensequenz h' erweitern. In diesem Fall schreibt man (h, h').

- Ist $h \in H$ ein offener Verlauf so setzen wir $A(h) := \{a : a \text{ Aktion mit } (h, a) \in H\}$. $A(h)$ enthält also alle Aktionen, die der Spieler $P(h)$ nach dem Verlauf h ausführen kann.

Ein extensives Spiel mit perfekter Information läuft nun wie folgt ab: Das Spiel beginnt mit dem leeren Verlauf $\emptyset$, welcher auch Initialverlauf genannt wird. Der Spieler $P(\emptyset) \in N$ wählt eine Aktion $a^0 \in A(\emptyset)$. Daraufhin wählt der Spieler $P(a^0)$ ein Element a^1 aus der Menge seiner möglichen Aktionen $A(a^0)$. Durch diese Wahl wird dann der nächste Spieler bestimmt (nämlich $P(a^0, a^1)$) und so weiter. Ergibt sich im Laufe des Spiels ein abgeschlossener endlicher Verlauf, endet das Spiel. Ansonsten wird das Spiel unendlich lange weiter gespielt und es ergibt sich ein unendlicher abgeschlossener Verlauf. Häufig werden Präferenzrelationen auf der Menge der abgeschlossenen Verläufe durch Auszahlungsfunktionen $u_i : Z \to \mathbb{R}$ der Spieler $i \in N$ gegeben.

Beispiel 1.3. Wenden wir die vorher eingeführten Begrifflichkeiten auf das Spiel γ an. Aus dem Spielbaum in Abbildung 1 lässt sich ablesen, dass gilt:

- $N = \{1, 2\}$ ist die Spielermenge
- $H = \{\emptyset, B, F, FW, FV, FVD, FVE\}$ ist die Menge aller Verläufe im Spiel
- γ ist endlich und hat einen endlichen Horizon mit $\ell(\gamma) = 3$
- $Z = \{B, FW, FVD, FVE\}$ ist die Menge der abgeschlossenen Verläufe
- $H \backslash Z = \{\emptyset, F, FV\}$ ist somit die Menge der offenen Verläufe
- $P(\emptyset) = 1, P(F) = 2, P(FV) = 1$ definiert somit die Spielerfunktion
- $D_1 = \{\emptyset, FV\},\ D_2 = \{F\}$
- $A(\emptyset) = \{F, B\},\ A(F) = \{V, W\},\ A(FV) = \{E, D\}$
- $FW \geq_1 FVD \geq_1 FVE =_1 B$ sowie $FVD \geq_2 FW \geq_2 FVE =_2 B$

Anmerkung. Wir werden das Spiel γ im Verlauf dieser Ausarbeitung noch sehr ausführlich untersuchen. Um dabei den Blick für das Wesentliche nicht zu verlieren, haben wir die Notation stets so einfach wie möglich gehalten. Wir stellen Verläufe in γ durch einfache Aneinanderreihung der Spieleraktionen dar, z.B. schreiben wir FVD anstatt (F,V,D). Einelementige Verläufe und Aktionen werden somit in der Notation nicht unterschieden, z.B. ist B sowohl ein Verlauf in der Menge H, als auch eine Spieleraktion in der Menge $A(\emptyset)$. Dies wird jedoch an keiner Stelle zu Komplikationen führen.

2 Strategien

Mit einer Strategie legt ein Spieler für jeden offenen Verlauf, nach welchem er an der Reihe ist, eine Aktion fest.

Definition 2.1. Eine **Strategie eines Spielers** $i \in N$ in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $(N,H,P,(\geq_i)_{i\in N})$ ist eine Funktion s_i, welche jedem Verlauf $h \in D_i$ (also jedem $h \in H$ mit $P(h) = i$) eine Aktion $s_i(h) \in A(h)$ zuordnet. Den Definitionsbereich einer Strategie s_i von Spieler i bildet also die Menge D_i.

Bezeichnungen. Sei $\Gamma = (N,H,P,(\geq_i))$ ein extensives Spiel mit perfekter Information, so bezeichnen wir mit S_i die Menge aller möglichen Strategien des Spieles $i \in N$ und nennen diese Menge auch Strategieraum von Spieler i. Fernen setzten wir $S := \times_{i\in N} S_i$ als die Menge aller möglichen Strategieprofile in Γ und nennen diese Menge auch Strategieraum von Γ.

Beispiel 2.2. Betrachten wir das Spiel γ:

- Jede Strategie s_1 von Spieler 1 ist auf der Menge $D_1 = \{\emptyset, FV\}$ definiert, wobei $A(\emptyset) = \{F,B\}$ und $A(FV) = \{E,D\}$. Somit besitzt Spieler 1 genau die vier Strategien $\langle F,E\rangle$, $\langle F,D\rangle$, $\langle B,E\rangle$ und $\langle B,D\rangle$. Hierbei steht beispielsweise $\langle F,E\rangle$ für die Strategie s_1 von Spieler 1 mit $s_1(\emptyset) = F$ und $s_1(FV) = E$.

- Jede Strategie s_2 von Spieler 2 ist auf der Menge $D_2 = \{F\}$ definiert, wobei $A(F) = \{V,W\}$. Spieler 2 besitzt also genau die Strategien $\langle V\rangle$ und $\langle W\rangle$, wobei wir z.B. mit $\langle V\rangle$ die Strategie s_2 von Spieler 2 identifizieren mit $s_2(F) = V$

Anmerkung. Wichtig bei einer Strategie s_i von Spieler i ist, dass sie wirklich auf allen offenen Verläufen definiert ist, nach welchen Spieler i am Zug ist (also auf ganz D_i), sogar auf den Verläufen, welche gar nicht erst zustande kommen können, sollte die Strategie befolgt werden.

Definition 2.3. Sei $(N, H, P, (\geq_i))$ ein extensives Spiel und ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ gegeben, das heißt für jedes $i \in N$ ist s_i eine Strategie von Spieler i. Der **Ausgang** von s wird mit $O(s)$ bezeichnet und ist derjenige abgeschlossene Verlauf (möglicherweise unendlich) aus Z, welcher sich ergibt, wenn jeder Spieler i seine Strategie s_i anwendet. Damit bildet $O : S \to Z$ eine Funktion, die sogenannte Ausgangsfunktion.

Beispiel 2.4. Im Spiel γ gilt zum Beispiel für das Strategieprofil $(\langle F, D\rangle, \langle W\rangle) \in S$, dass $O(\langle F, D\rangle, \langle W\rangle) = FW \in Z$. Alle Ausgänge des Spiels lassen sich der folgenden Abbildung 2 entnehmen. Jedes Strategieprofil des Spiels γ ist ein Paar bestehend aus einer Strategie von Spieler 1 und einer Strategie von Spieler 2. In der Abbildung ist Spieler 1 der Reihenspieler (d.h. er bestimmt durch seine Strategiewahl die Reihe) und Spieler 2 der Spaltenspieler (mit analoger Bedeutung). Der daraus resultierende Ausgang lässt sich ablesen.

	$\langle V\rangle$	$\langle W\rangle$
$\langle F, E\rangle$	FVE	FW
$\langle F, D\rangle$	FVD	FW
$\langle B, E\rangle$	B	B
$\langle B, D\rangle$	B	B

Abbildung 2: Ausgänge des Spiels γ

3 Das Nash-Gleichgewicht

Definition 3.1. Ein **Nash-Gleichgewicht eines extensiven Spiels mit perfekter Information** $(N, H, P, (\geq_i))$ ist eine Strategieprofil s^*, sodass für jeden Spieler $i \in N$ gilt:

$$\forall\, s_i \in S_i : O(s^*_{-i}, s^*_i) \geq_i O(s^*_{-i}, s_i)$$

Ein Strategieprofil $s^* \in S$ ist also genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn sich kein Spieler alleine durch Ändern seiner Strategie besser stellen kann.

Beispiel 3.2. Betrachten wir das Spiel γ und bestimmen seine Nash-Gleichgewichte. Der Strategieraum von Spieler 1 ist hier $S_1 = \{\langle F, E\rangle, \langle F, D\rangle, \langle B, E\rangle, \langle B, D\rangle\}$, und der Strategieraum von Spieler 2 ist $S_2 = \{\langle V\rangle, \langle W\rangle\}$. Jede der 8 Strategiekombinationen führt nun zu einem Ausgang (vgl. Abbildung 2, S. 6), welcher wiederum zu einem Auszahlungsprofil führt (vgl. Abbildung 1, S.2).

Die Auszahlungen, welche sich aus allen möglichen Strategiekombinationen ergeben, lassen sich der Auszahlungsmatrix in Abbildung 3 entnehmen.

	$\langle V \rangle$	$\langle W \rangle$
$\langle F, E \rangle$	$(1,1)$	$(3,2)^*$
$\langle F, D \rangle$	$(2,3)^*$	$(3,2)$
$\langle B, E \rangle$	$(1,1)$	$(1,1)$
$\langle B, D \rangle$	$(1,1)$	$(1,1)$

Abbildung 3: Auszahlungen des Spiels γ

Hierbei wurde wie schon vorher die Konvention verwendet, dass Spieler 1 der Reihenspieler ist, d.h. er bestimmt mit seiner Aktion die Reihe. Analog ist Spieler 2 der Spaltenspieler, welcher mit seiner Aktion die Spalte bestimmt. Anhand der Auszahlungsmatrix lassen sich nun einfach die Nash-Gleichgewichte bestimmen. Sie sind in der Tabelle mit einem * versehen. Also sind die Profile $(\langle F, D \rangle, \langle V \rangle)$ und $(\langle F, E \rangle, \langle W \rangle)$ die Nashgleichgewichte von γ.

Bemerkung 3.3. Das Konzept des Nashgleichgewichtes in extensiven Spielen kollidiert mit der Vorstellung, dass die Spieler rational handeln und sich ihre Aktion aussuchen können, *wenn sie an der Reihe sind*. Betrachten wir dazu unser Spiel γ in Abbildung 1 auf Seite 2: In diesem Spiel sind die beiden Nashgleichgewichte $(\langle F, E \rangle, \langle W \rangle)$ und $(\langle F, D \rangle, \langle V \rangle)$. Nun ist $(\langle F, E \rangle, \langle W \rangle)$ unter anderem deswegen ein Nash-Gleichgewicht, weil Spieler 2 sich durch die Wahl der Alternativstrategie $\langle V \rangle$ nicht besser stellen kann, weil der daraus resultierende Ausgang FVE wäre. Doch die „Drohung“ von Spieler 1, seine Strategie $\langle F, E \rangle$ zu verfolgen, also insbesondere die Aktion E zu wählen, sollte Spieler 2 im Zug vorher die Aktion V wählen, ist unglaubwürdig. Denn würde Spieler 2 von $\langle V \rangle$ zu $\langle W \rangle$ wechseln, und könnte sich dann Spieler 1 für eine der Aktionen E oder D entscheiden, würde er als rationaler Spieler sicherlich nicht die Aktion E wählen, da seine Auszahlung bei Wahl von D größer wäre. Wir halten also fest, dass die Entscheidung für E (bzw. das Befolgen seiner Strategie $\langle F, E \rangle$) „ab einer gewissen Stufe“ des Spiels für Spieler 1 nicht optimal ist.

Wir sehen also, dass gewisse Strategien in extensiven Spielen nicht rational sind, und dass es unter solchen irrationalen Strategien auch Nash-Gleichgewichte geben kann. Das Konzept der teilspielperfekten Gleichgewichte eliminiert diese irrationalen Strategien und Nash-Gleichgewichte. Wir werden zunächst das Kalkül der Teilspiele erläutern und dann auf teilspielperfekte Gleichgewichte eingehen.

4 Teilspiele

Definition 4.1. Das **Teilspiel eines extensiven Spiels mit perfekter Information** $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i))$**, welches dem Verlauf** h **folgt,** ist das extensive Spiel $\Gamma(h) = (N, H|_h, P|_h, (\geq_i|_h))$, wobei gilt:

- $H|_h$ ist die Menge der Aktionsfolgen h', für welche $(h, h') \in H$ gilt.
- $P|_h$ ist definiert durch $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.
- $\geq_i|_h$ ist definiert durch: $\forall\, h', h'' \in H|_h : h' \geq_i |_h h'' :\Leftrightarrow (h, h') \geq_i (h, h'')$.

Bezeichnungen. Im Folgenden werden wir weitere Bezeichnungen einführen und kleinere Resultate aufzeigen. Dies wird uns das weitere Vorgehen erleichtern. Seien dazu $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i))$ ein extensives Spiel und $\Gamma(h)$ für ein $h \in H$ ein Teilspiel.

- Wir setzen $D_i|_h := \{h' \in H|_h : P|_h(h') = i\}$. Dies sind genau die Verläufe im Teilspiel $\Gamma(h)$, die dazu führen, dass Spieler i am Zug ist. Es gilt für ein $h' \in H|_h$, dass $h' \in D_i|_h \Leftrightarrow (h, h') \in D_i$.
- Für eine Strategie s_i des Spielers i im Spiel Γ sei $s_i|_h$ die Strategie in $\Gamma(h)$, welche von s_i induziert wird, d.h. für alle $h' \in D_i|_h$ gilt $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$. Insbesondere kann $s_i|_h$ eine leere Strategie im Sinne einer leeren Funktion sein, denn es kann passieren, dass der Spieler i nach dem Verlauf h gar nicht mehr zum Zug kommt, d.h., dass $D_i|_h = \emptyset$ gilt. Dann ist seine einzige Strategie die leere Strategie.
- Wir bezeichnen mit $S_i|_h$ die Menge aller Strategien von Spieler i im Teilspiel $\Gamma(h)$ und mit $S|_h$ die Menge aller Strategieprofile in $\Gamma(h)$. Ist $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ ein Strategieprofil, so setzen wir $s|_h := (s_1|_h, \ldots, s_n|_h)$.
- Da jeder Spieler im schlimmsten Fall seine leere Strategie besitzt, ist gesichert, dass alle $S_i|_h$ und damit auch $S|_h = \times_{i \in N} S_i|_h$ nichtleer sind.
- Wir bezeichnen mit O_h die Ausgangsfunktion des Teilspiels $\Gamma(h)$.

Beispiel 4.2. Betrachten wir das Spiel γ und den Verlauf $h := FV$. Für das Teilspiel $\gamma(h)$ gilt:

- $H|_h = \{\emptyset, E, D\}$, wobei $\emptyset \in H|_h$ der einzige offene Verlauf des Spiels $\gamma(h)$ ist.
- $P|_h(\emptyset) = 1$
- $S_1|_h = \{\langle E\rangle,\ \langle D\rangle\},\ S_2|_h = \{\langle\emptyset\rangle\}$

- Es gilt für die Strategien von Spieler 1 in Γ: $\langle F, E\rangle|_h = \langle B, E\rangle|_h = \langle E\rangle$ und $\langle F, D\rangle|_h = \langle B, D\rangle|_h = \langle D\rangle$.
- Für die Strategien von Spieler 2 gilt $\langle V\rangle|_h = \langle W\rangle|_h = \langle\emptyset\rangle$.
- $\gamma(h)$ besitzt das Nash-Gleichgewicht $(\langle D\rangle, \langle\emptyset\rangle)$

Betrachten wir nun die Nash-Gleichgewichte von γ und $\gamma(h)$: Die Nash-Gleichgewichte in γ sind bekanntlich $(\langle F, E\rangle, \langle W\rangle)$ und $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$. Induzieren wir diese Strategieprofile auf das Teilspiel $\gamma(h)$, so ergeben sich die Strategieprofile $(\langle F, E\rangle, \langle W\rangle)|_h = (\langle F, E\rangle|_h, \langle W\rangle|_h) = (\langle E\rangle, \langle\emptyset\rangle)$ sowie $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)|_h = (\langle F, D\rangle|_h, \langle V\rangle|_h) = (\langle D\rangle, \langle\emptyset\rangle)$, von welchen nur letzteres im Teilspiel $\gamma(h)$ ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht darstellt. Hennings „Drohstrategie" (vlg. Bemerkung 3.3) ist also induziert auf das Teilspiel $\gamma(h)$ nicht optimal. Auf der anderen Seite kann man leicht nachprüfen, dass das Strategieprofil $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ in *jedem* Teilspiel von γ ein Nash-Gleichgewicht darstellt (siehe Beispiel 5.3). Man nennt solch ein Strategieprofil dann **teilspielperfektes Gleichgewicht**. Dieses Kalkül wollen wir im nächsten Kapitel genauer studieren.

5 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Definition 5.1. Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht eines extensiven Spiels mit perfekter Information** $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i))$ ist ein Strategieprofil s^* in Γ, sodass für jedes $h \in H$ die Strategie $s^*|_h$ ein Nashgleichgewicht im Teilspiel $\Gamma(h)$ bildet.

Bemerkung 5.2. Natürlich ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht stets ein Nash-Gleichgewicht. Dies liefert also eine notwendige Bedingung für das Auffinden teilspielperfekter Gleichgewichte.

Beispiel 5.3. Ermitteln wir im Spiel γ die teilspielperfekten Gleichgewichte: Nach Bemerkung 5.2 lohnt sich die Suche nur unter den Nash-Gleichgewichten, welche bekanntlich durch $(\langle F, E\rangle, \langle W\rangle)$ und $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ gegeben sind. Nach Beispiel 4.2 ist $(\langle F, E\rangle, \langle W\rangle)$ induziert auf das Teilspiel $\gamma(FV)$ kein Nash-Gleichgewicht mehr, also ist $(\langle F, E\rangle, \langle W\rangle)$ kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Analysieren wir nun das Strategieprofil $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$:
In allen Spielen $\gamma(h)$, wobei $h \in H$ abgeschlossen ist, ist $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ trivialerweise ein Nash-Gleichgewicht, da dann $\gamma(h)$ ein leeres Spiel ist. Wir wissen auch schon, dass $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ induziert auf $\gamma(\emptyset) = \gamma$ und auf $\gamma(FV)$ jeweils ein Nash-Gleichgewicht ist. Es verbleibt, zu überprüfen, ob $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ induziert auf das Teilspiel $\gamma(F)$ ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht bildet. Es gilt $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)|_F = (\langle D\rangle, \langle V\rangle)$. Da sich weder Spieler 2

durch einen Wechsel von $\langle V \rangle$ nach $\langle W \rangle$, noch Spieler 1 durch einen Wechsel von $\langle D \rangle$ nach $\langle E \rangle$ verbessern kann, liegt also ein Nash-Gleichgewicht vor. Damit ist $(\langle F, D \rangle, \langle V \rangle)$ in jedem Teilspiel von γ ein Nash-Gleichgewicht, also ein teilspielperfektes Gleichgewicht von γ.

Lemma 5.4. *Die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft (ESA). Sei* $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i))$ *ein extensives Spiel mit perfekter Information und endlichem Horizont, d.h.* $\ell(\Gamma) \in \mathbb{N}$. *Ein Strategieprofil* s^* *ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht genau dann, wenn für jeden Spieler* $i \in N$ *und jeden Verlauf* $h \in D_i$ *gilt:*

$$O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h) \geq_i |_h O_h(s^*_{-i}|_h, s_i)$$

für jede Strategie $s_i \in S_i|_h$, *welche von der Strategie* $s^*_i|_h$ *nur auf dem Initialverlauf von* $\Gamma(h)$ *abweicht.*

Anmerkung. Nach Lemma 5.4 ist ein Strategieprofil s^* in einem Spiel mit endlichem Horizont genau dann ein teilspielperkektes Gleichgewicht, wenn sich in jedem nichtleeren Teilspiel der Anfangsspieler im ersten Zug nicht verbessern kann.

Satz 5.5. (Kuhn's Theorem) *Sei* $\Gamma = (N, H, P, (\geq_i))$ *ein extensives Spiel mit perfekter Information. Ist* Γ *endlich (d.h. ist* H *endlich), so besitzt* Γ *ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Beispiel 5.6. Wenden wir die Konstruktion eines teilspielperfekten Gleichgewichtes aus dem Beweis des Satzes von Kuhn auf unser Beispiel γ an. Die Idee ist hier, ein Strategieprofil zu erstellen, welches Ein-Schritt-Abweichungs-optimal ist. Nach Lemma 5.4 ist jenes Strategieprofil dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
Hierbei beginnen wir beim Ende des Spiels und arbeiten uns sukzessive zum Anfang des Spiels vor unter Berücksichtigung der vorher spezifizierten Aktionen. Dieses Vorgehen nennt man auch Rückwärtsinduktion. Zur Verdeutlichung verfolge die Konstruktion anhand des Spielbaums in Abbildung 1. Das Spiel γ hat drei Entscheidungsstufen.

Die dritte Spielstufe

Die 3. Stufe im Spiel γ ist die Entscheidung von Spieler 1 im Teilspiel $\gamma(FV)$. Offenbar ist die Aktion D in diesem Teilspiel für Spieler 1 optimal. Setze also $s_1(FV) := D$. Dann ist s_1 auf dem Teilspiel $\gamma(FV)$ definiert und für eine beliebige Fortsetzung von s_1 auf Γ ist dann $s_1|_{FV}$ Ein-Schritt-Abweichungs-optimal.

Die zweite Spielstufe

Die 2. Stufe im Spiel γ ist die Entscheidung von Spieler 2 im Teilspiel $\gamma(F)$. Unter Berücksichtigung der zuvor fixierten Aktion D von Spieler 1 ist die Aktion V von Spieler 2 nun optimal. Setze also $s_2(F) := V$. Dann ist s_2 bereits eine wohldefinierte Strategie im Spiel γ, welche im Teilspiel $\gamma(F)$ Ein-Schritt-Abweichungs-optimal ist.

Die erste Spielstufe

Die 1. Stufe im Spiel γ ist die Entscheidung von Spieler 1 am Anfang des Spiel. Unter Berücksichtigung aller vorher spezifizierten Aktionen ist die Aktion F für Spieler 1 nun optimal. Setze also $s_1(\emptyset) := F$. Damit ist s_1 auch Ein-Schritt-Abweichungs-optimal im Spiel γ.

Wir erhalten also wohldefinierte Strategien $s_1 = \langle F, D\rangle$ von Spieler 1 und $s_2 = \langle V\rangle$ von Spieler 2, sodass das Strategieprofil $(s_1, s_2) = (\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ Ein-Schritt-Abweichungs-optimal ist. Dies war unser Ziel. Mit Lemma 5.4 ist $(\langle F, D\rangle, \langle V\rangle)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht, was wir schon in Beispiel 5.3 gesehen haben.

6 Fazit

Die Definition eines Nash-Gleichgewichts in strategischen Spielen als ein Aktionsprofil, von welchem ausgehend sich kein Spieler durch Abändern seiner Aktion besser stellen kann, legt die Vermutung nahe, es handle sich bei einem Nash-Gleichgewicht um einen Zustand der Optimalität. Da es jedoch zahlreiche Beispiele von Spielen und Nash-Gleichgewichten gibt, in welchen manche Spieler alles andere als „optimal" gestellt sind, sollte man ein Nash-Gleichgewicht nicht als Zustand der Optimalität ansehen, sondern vielmehr als Zustand der Stabilität. Denn in einem Nash-Gleichgewicht eines strategischen Spiels hat schließlich kein Spieler einen Anreiz, von seiner Aktion abzuweichen.

Ein Nash-Gleichgewicht in einem extensiven Spiel erfüllt diese Eigenschaft nicht, ist also kein Zustand der Stabilität. Denn wie wir in Bemerkung 3.3 gesehen haben, kann es in einem Nash-Gleichgewicht eines extensiven Spiels durchaus einen Anreiz geben, während des Spiels von seiner Strategie abzuweichen. Ein Nash-Gleichgewicht ist also nicht *laufzeitstabil*.

Eine Verschärfung des Nash-Gleichgewichts hat uns zum teilspielperfekten Gleichgewicht geführt, und jenes liefert uns nun einen Zustand der Stabilität in extensiven Spielen. Denn weicht ein Spieler während der Laufzeit des Spiels von seiner Strategie ab, wird ein Teilspiel erreicht, in welchem wieder jeder Spieler ein optimale Strategie zur Hand hat, also anders als in dem Beispiel von Bemerkung 3.3. Deswegen wird also kein anderer Spieler von seiner Strategie abweichen. Da der ürsprüngliche Abweicher folglich damit rechnen muss, der einzige Abweicher im Spiel zu bleiben, lohnt sich seine Abweichung nicht. Denn weicht nur er ab, kann er sich nicht verbessern, da seine Strategie Teil eines Nash-Gleichgewichtes war.