Seminarvortrag
Extensive Spiele
mit imperfekter Information

Eva Fischedick
Betreuer: Prof. Dr. Löwe

19. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der heutige Vortrag handelt von den extensiven Spielen mit imperfekter Information.
In den bisherigen Vorträgen haben wir schon strategische Spiele und extensive Spiele mit perfekter Information kennengelernt. Bei den strategischen Spielen wählten die Spieler jeweils zum Anfang des Spiels eine Aktion aus, kannten allerdings nicht die Aktion ihrer Mitspieler. Dies änderte sich schnell, als wir zu den extensiven Spielen mit perfekter Information übergingen. In einem extensiven Spiel handeln die Spieler nacheinander und müssen oftmals auch mehrfach in einem Spiel eine Aktion auswählen. Auch hier wählen sie ihre Strategie zu Beginn des Spiels. Jeder Spieler kann allerdings das komplette Spiel und alle Aktionen seiner Mitspieler beobachten, wie es zum Beispiel bei dem Spiel *Monopoly* der Fall ist.
Heute aber wollen wir wissen, was passiert, wenn Spieler nicht das komplette Spiel beobachten können. Was geschieht, wenn sie zwar wissen, dass sie an der Reihe sind, aber nicht, was zuvor geschehen ist? Wie sollen sie sich für eine Aktion entscheiden, wenn sie garnicht genau wissen, an welchem Punkt im Spiel sie sich befinden?
Später möchten wir erklären, dass es für ein Spiel von besonderer Bedeutung ist, wenn sich Spieler perfekt an das bisherige Spielgeschehen erinnern können. Sie müssen dann nicht mehr, wie in den vorigen Modellen, am Beginn des Spiels eine Strategie auswählen. Ein Spieler kann stattdessen für jedes Mal, wenn er am Zug ist, sich unabhängig für eine Aktion entscheiden.
All dies werden wir an einem durchgehenden Beispiel erklären und verdeutlichen, welches direkt eingeführt wird.

2 Extensive Spiele mit imperfekter Information

2.1 Definition und Beispiel

Zunächst erklären wir die extensiven Spiele mit imperfekter Information. Bei dieser Art von Spielen ist es möglich, dass ein Spieler nicht alle Informationen über den bisherigen Spielverlauf hat. Er weiß möglicherweise nicht immer, welche Aktionen seine Mitspieler schon getätigt haben. Zu dieser Kategorie von Spielen gehört klassischerweise das Pokerspiel. Hierbei sind die Spieler jeweils nicht darüber informiert, welche Karten und Ausgangssituationen die Mitspieler haben. Sie sind also in dem Sinne nicht über die Aktionen der Mitspieler informiert, als dass sie nicht wissen, auf welches Blatt die jeweiligen Mitspieler setzen. Somit können sie auch nicht wissen, ob sie das stärkste Blatt auf der Hand haben, also ob sie das

Spiel gewinnen werden.
Im Gegensatz hierzu stehen die schon bekannten Spiele mit perfekter Information, wie zum Beispiel das Spiel Monopoly. Dort kennt jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt die genaue Situation seiner Mitspieler und ist perfekt informiert.

Definition 2.1 (Extensives Spiel mit imperfekter Information) Für ein *extensives Spiel* $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_i)_{i\in N}, \succsim_i \rangle$ *mit imperfekter Information* sei folgendes gegeben:

- Eine endliche Menge $N = \{1, 2, ..., n\}$ von Spielern
- Eine Menge H von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
  - $\emptyset \in H$
  - Falls $(a^k)_{k=1,...,K} \in H$, mit $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und $L < K$, so ist auch $(a^k)_{k=1,...,L} \in H$.
  - Wenn für $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ gilt, dass jede Folge $(a^k)_{k=1,...,L} \in H$ für alle positiven natürlichen Zahlen $L \in N$, so ist $(a^k)_{k=1}^{\infty} \in H$

  (Jede Sequenz aus H ist ein *Verlauf*, jedes Element $a^k \in (a^k)_{k=1,...,L}$ ist eine mögliche *Aktion* oder *Zug* eines Spielers.)
  Ein Verlauf $(a^k)_{k=1,...,K} \in H$ ist *abgeschlossen*, wenn er unendlich ist, oder wenn es kein a^{K+1} gibt, sodass $(a^k)_{k=1,...,K+1} \in H$.
  Ist ein Verlauf $h' = (a^k)_{k=1,...,L}$ nicht abgeschlossen, so nennen wir den Verlauf *offen* und h' eine *Anfangssequenz* von $h = (a^k)_{k=1,...,K}$, $K > L$.
  Die zum Verlauf h gehörende Aktionsmenge ist $A(h) = \{a : (h, a) \in H\}$. Die Menge aller abgeschlossenen Verläufe bezeichnen wir mit Z.
- Eine Funktion $P : H \backslash Z \to N \cup \{c\}$, die jedem offenen Verlauf $h \in H$ einen Spieler aus $N \cup \{c\}$ zuweist. (P ist die sogenannte *Spieler-Funktion*, die anzeigt, welcher Spieler nach einem offenen Verlauf in Aktion tritt. Ist $P(h) = c$, so entscheidet der Zufall über die Aktion, die nach h gespielt wird.)
- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $f_c(\cdot \mid h)$ auf $A(h)$ für jeden Verlauf h mit $P(h) = c$. Der Zufallsspieler entscheidet unabhängig von seinen vorigen Entscheidungen, es gibt also unabhängige Zufallsgrößen $(X_h)_{\{h\in H:P(h)=c\}}$ mit $\mathbb{P}^{X_h}(\cdot) := f_c(\cdot \mid h)$.
- Für jeden Spieler $i \in N$ sei $\mathcal{I}_i$ eine Partition der Menge $\{h \in H : P(h) = i\}$ mit der Eigenschaft, dass $A(h) = A(h')$, wenn $h, h' \in I$, mit $I \in \mathcal{I}_i$. Wir bezeichnen die Menge $A(h)$ mit $A(I)$ und den Spieler $P(h)$ nennen wir $P(I)$. ($\mathcal{I}_i$ ist die gesamte Informationspartition von Spieler i, die Menge I ist eine *Informationsmenge* von Spieler i.)

- Für jeden Spieler $i \in N$ gibt es eine Präferenz-Relation $\succsim_i$ über den Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Z.

Von nun an werden wir von dem 5-Tupel $\langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_{i\in N})\rangle$ mit den Eigenschaften aus obiger Definiton als extensive Spielform sprechen und das extensive Spiel mit imperfekter Information Γ nennen.

Neu gegenüber den früher kennengelernten extensiven Spielen mit perfekter Information sind die Informationspartitionen $\mathcal{I}_i$. Die gegebenen Verläufe $h, h', ...$ in einer Informationsmenge $I \in \mathcal{I}_i$ sind für den Spieler i nicht zu unterscheiden. Somit wird eine Situation modelliert, in der Spieler i zwar weiß, dass ein Verlauf aus I eingetreten ist, aber nicht, welcher. Genau deswegen gilt auch $A(h) = A(h')$ für $h, h' \in I$, denn sonst könnte Spieler i aus seiner verfügbaren Aktionsmenge $A(h)$ schon schließen, dass der Verlauf h' nicht eingetreten ist.

Folgendes Beispiel wird uns währen des gesamten Vortrages helfen, die Spiele mit imperfekter Information noch besser zu verstehen:

Beispiel 2.1 (Das Streichholzspiel) Wir betrachten das Spiel Γ in Abbildung 1.[1]

Spielverlauf:

Spieler 1 beginnt. Er entscheidet sich, ob er Spieler 2 zu einem Spiel um Streichhölzer auffordert (ja), oder nicht ($nein$). Wenn er sich entscheidet, Spieler 2 nicht zum Streichholzspiel aufzufordern, bekommen beide Spieler eine Auszahlung von 0 (Euro).

Fordert er Spieler 2 zum Spiel auf, nimmt Spieler 2 verdeckt ein Streichholz in eine seiner Hände (r steht hierbei für die rechte Hand, l für die linke). Spieler 1, der nicht weiß, in welcher Hand sich das Streichholz befindet, ist nun an der Reihe. Er hat die Wahl zwischen der rechten (r') und linken (l') Hand von Spieler 2. Tippt er auf die richtige Hand, erhält Spieler 1 von Spieler 2 einen Euro, falls nicht, erhält Spieler 2 von Spieler 1 einen Euro.

Insgesamt ist Spieler 1 also imperfekt informiert, denn wenn er eine Hand von Spieler 2 auswählen soll, weiß er nicht, in welcher Hand sich das Streichholz befindet. Er konnte den Zug von Spieler 2 nicht beobachten.

[1]Kurze Erläuterung zum Spielbaum: Die gestrichelte Linie zeigt an, dass die verbundenen Anfangssequenzen vom entsprechenden Spieler i nicht unterschieden werden können. Die Anfangssequenzen liegen also für i in einer Informationsmenge $I \in \mathcal{I}_i$.

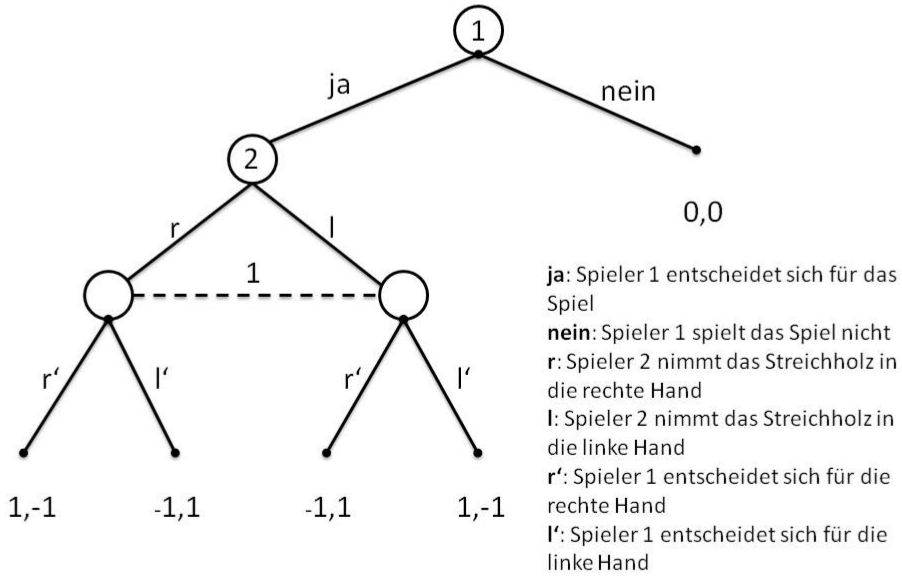

Abbildung 1: Das Streichholzspiel (extensives Spiel mit imperfekter Information)

Formal sieht das Spiel dann folgendermaßen aus:

- $N = \{1, 2\}$
- $H = \{\emptyset, ja, nein, (ja, r), (ja, l), (ja, r, r'), (ja, r, l'), (ja, l, r'), (ja, l, l')\}$
- $P(\emptyset) = P(ja, r) = P(ja, l) = 1$ und $P(ja) = 2$
- Da keine Zufallszüge im Spiel sind, brauchen wir kein Wahrscheinlichkeitsmaß f_c
- $\mathcal{I}_1 = \{\{\emptyset\}, \{(ja, r), (ja, l)\}\}$
- $\mathcal{I}_2 = \{\{ja\}\}$

Spieler 2 hat nur eine einelementige Informationsmenge und ist somit perfekt informiert, während Spieler 1 zwei Informationsmengen hat. Diese stehen hier für die verschiedenen Zeitpunkte im Spiel. Die zweite Informationsmenge ist zweielementig, also ist Spieler 1 bei seinem zweiten Zug nicht informiert, ob Spieler 2 zuvor r oder l gewählt hat.

2.2 Perfekte und imperfekte Erinnerung

In einem extensiven Spiel Γ kommt es immer auch darauf an, was ein Spieler vom bisherigen Spielverlauf erinnern kann. Wir bezeichnen die Erinnerung eines Verlaufs h für einen Spieler i mit $X_i(h)$.

$$X_i : H \to \mathcal{P}(\mathcal{I}_i \cup A(\mathcal{I}_i)), h \mapsto (I_1, a^1, I_2, a^2, ...)$$

$X_i(h)$ zeigt alle Informationsmengen $I \in \mathcal{I}_i$, denen Spieler i in seinem Verlauf h begegnet ist, zusammen mit den Aktionen $a^k \in A(I)$, die er an den Informationsmengen I getätigt hat. Diese Ereignisse werden in der Reihenfolge angezeigt, in der sie aufgetreten sind.[2]

Definition 2.2 (Perfekte Erinnerung) Ein extensives Spiel Γ hat *perfekte Erinnerung*, falls für jeden Spieler i gilt: $X_i(h) = X_i(h')$ genau dann, wenn h und h' in der selben Informationsmenge I von Spieler i sind.

Γ hat also perfekte Erinnerung, falls jeder Spieler i zu jedem Zeitpunkt im Spiel weiß, welche Entscheidungen $A(I)$ er an jeder bisherigen Informationsmenge $I \in \mathcal{I}_i$ getroffen hat. Zudem weiß er auch alles, was er schon vorher wusste, also erinnert er insbesondere Zufallszüge und Züge der Mitspieler, die er früher beobachten konnte.

Definition 2.3 (Imperfekte Erinnerung) Ein extensives Spiel Γ hat *imperfekte Erinnerung*, wenn einer oder mehrere Spieler nicht zu jedem Zeitpunkt über perfekte Erinnerung verfügen.

Bei dem vorangegangenen Beispiel aus Abbildung 1 handelt es sich um ein Spiel mit perfekter Erinnerung, da beide Spieler sich zu jedem Zeitpunkt im Spiel an all das erinnern können, was sie schon vorher wussten. Spieler 1 weiß, wenn er eine Hand von Spieler 2 auswählt, dass er zuvor Spieler 2 zum Spiel aufgefordert hat.In Abbildung 2 sehen wir drei 1-Spieler Spiele mit jeweils imperfekter Erinnerung.

[2] In Beispiel 1 wäre also die Erinnerung von Spieler 1 zum Verlauf (ja, r): $X_1((ja, r)) = (\emptyset, ja, \{(ja, r), (ja, l)\})$

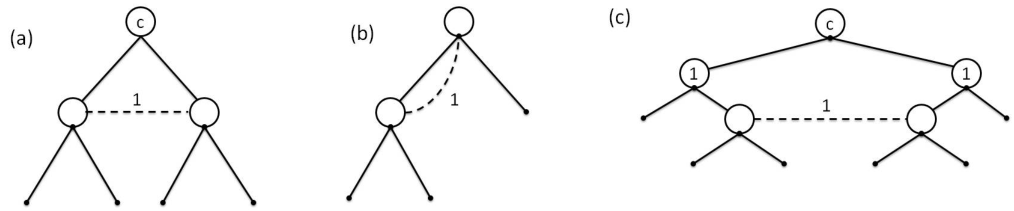

Abbildung 2: Drei 1-Spieler Spiele mit imperfekter Erinnerung

In Spiel (a) entscheidet sich Spieler 1 zwischen zwei Alternativen, um danach nochmal zwischen 2 Alternativen auszuwählen, ohne zu wissen, welche Entscheidung er im ersten Zug gewählt hat.[3]
Im zweiten Spiel (b) weiß Spieler 1 nicht, an welchem Zeitpunkt des Spiels er sich befindet. Er weiß nur, dass er entweder das Spiel gerade beginnt, oder dass er schon einen Zug getan hat, der einen weiteren Zug seinerseits herbeiführt.
Beim dritten Spiel (c) wählt zunächst der Zufall einen der beiden Äste aus. Seine Entscheidung ist Spieler 1 nun bekannt und er entscheidet sich für einen Zug. Falls Spieler 1 danach noch einmal an der Reihe ist, weiß er, dass er im Zug davor die Alternative gewählt hat, die einen weiteren Zug verlangt. Allerdings kann er sich nun nicht mehr erinnern, welche Entscheidung der Zufall zu Beginn des Spiels getätigt hat.

3 Strategien in Spielen mit imperfekter Information

3.1 Reine, gemischte und Verhaltensstrategien

Bisher haben wir die Strategie eines Spielers in einem extensiven Spiel mit perfekter Information als Funktion kennengelernt, die jedem offenen Verlauf eine Aktion zuordnet. Diese Definition wollen wir nun auf Spiele mit imperfekter Information ausweiten:

[3]Dies wäre gleichzusetzen mit dem Streichholzspiel, in dem Spieler 1 das Streichholz in eine Hand legt, um kurz darauf zu raten, in welchem seiner Handballen es sich befindet, da er schon wieder vergessen hat, ob er die linke oder rechte Hand ausgewählt hat.

Definition 3.1 (Reine Strategie) Die *reine Strategie* s_i eines Spielers $i \in N$ in einem extensiven Spiel mit imperfekter Information Γ ist eine Funktion

$$s_i : \mathcal{I}_i \to \bigcup_{I \in \mathcal{I}_i} A(I),\ I \mapsto s_i(I),$$

die jeder Informationsmenge I genau eine Aktion $a \in A(I)$ zuweist.

Im Gegensatz zur reinen Strategie gibt es noch zwei Arten von Strategien, die zulassen, dass einige oder alle Aktionen der Spieler vom Zufall abhängen.

Definition 3.2 (Gemischte Strategie und Verhaltensstrategie) Eine *gemischte Strategie* σ_i eines Spielers i in einem extensiven Spiel Γ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der reinen Strategien von Spieler i.
Eine *Verhaltensstrategie* β_i von Spieler i ist ein Tupel von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$(\beta_i(I))_{I \in \mathcal{I}_i}, \quad \beta_i(I) \in \mathcal{W}(A(I)) \ \ \forall I \in \mathcal{I}_i,$$

die durch unabhängige Zufallsgrößen gegeben sind.[4]
Das bedeutet, dass auf jeder Informationsmenge wird unabhängig von vorigen Entscheidungen eine Aktion ausgewählt. Bei den gemischten Strategien ist diese Unabhängigkeit nicht gegeben.

Diese beiden Strategien zeigen, auf welche Weisen ein Spieler i differenzieren kann: Er kann entweder vor Beginn des Spiels zufällig eine reine Strategie auswählen (gemischte Strategie) oder er wählt auf jeder seiner Informationsmengen $I \in \mathcal{I}$ eine Aktion gemäß $\beta_i(I)$ aus (Verhaltensstrategie).
Um das zu verdeutlichen, betrachten wir noch einmal das Streichholzspiel in Abbildung 1. Hier hat Spieler 1 die zwei Informationsmengen $\{\emptyset\}$ und $\{(ja, r), (ja, l)\}$, an denen er jeweils die Auswahl zwischen zwei Aktionen hat.
Somit hat er insgesamt vier reine Strategien: $(ja, r'), (ja, l'), (nein, r')$ und $(nein, l')$. Seine gemischte Strategie ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über diesen vier reinen Strategien.
Die Verhaltensstrategie von Spieler 1 sieht allerdings etwas anders aus: Sie ist ein Paar zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen jeweils über eine der Informationsmengen $\{\emptyset\}$ und $\{(ja, r), (ja, l)\}$. Die Verhaltensstrategie ist also eine Verteilung über $\{ja, nein\}$ und eine Verteilung über $\{r', l'\}$, deren Realisierungen unabhängig voneinander sind.

[4] Den Informationsmengen liegen unabhängige Zufallsvariablen X_I zugrunde.

$$X_I : (\Omega, \mathcal{W}, \mathbb{P}) \to A(I),\ \mathbb{P}(X_I = a) = \beta_i(I)(a)$$

3.2 Ausgang eines Strategieprofils

Definition 3.3 Sei Γ ein endliches extensives Spiel.

a) Für einen Verlauf $h = (a^1, ..., a^k)$ und eine reine Strategie s_i für Spieler i, sagen wir s_i ist *konsistent* oder *vereinbar* mit h, falls für jede Anfangssequenz $h' = (a^1, ..., a^l), l < K$ mit $P(h') = i$ gilt, dass $s_i(h') = a^{l+1}$.
Andernfalls nennen wir s_i *inkonsistent* mit h.
Für einen Verlauf h und einen Spieler $i \in N \cup \{c\}$ definieren wir $\pi_i(h)$:

$$\pi_i(h) = \sum_{s_i \textit{ konsistent mit } h} \sigma_i(s_i)$$ [5,6]

b) Der Ausgang $O(\sigma)$ für ein Profil $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N \cup \{c\}}$ von gemischten Strategien ist:

$$O(\sigma)(h) := \prod_{i \in N \cup \{c\}} \pi_i(h), \forall h \in Z$$

Analog, für ein Profil $\beta = (\beta_i)_{i \in N \cup \{c\}}$ von Verhaltensstrategien ist der Ausgang $O(\beta)$:

$$O(\beta)(a^1, ..., a^K) := \prod_{k=0}^{K-1} \beta_{P(a^1,...,a^k)}(a^1, .., a^k)(a^{k+1}),\ \forall (a^1, ..., a^K) \in Z$$

Der Ausgang des Strategieprofils σ ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle abgeschlossenen Verläufe, die erreicht werden können, falls jeder Spieler i die Regeln seiner Strategie befolgt.

3.2.1 Der Satz von Kuhn

Definition 3.4 Zwei Strategien (gemischte Strategien oder Verhaltensstrategien) heißen *ausgangsäquivalent*, wenn für jede Zusammensetzung von reinen Strategien der anderen Spieler beide Strategien den gleichen Ausgang hervorbringen.

Lemma 3.1 Für jede Verhaltensstrategie σ_i in einem extensiven Spiel Γ mit perfekter Erinnerung gibt es eine ausgangsäquivalente gemischte Strategie β_i.

[5] Falls h zum Beispiel ein Verlauf ist, in dem Spieler i keine Aktion tätigt, so ist $\pi_i(h) = 1$

[6] $\sigma_i(s_i)$ ist genau die Wahrscheinlichkeit, die die gemischte Strategie σ_i von Spieler i der reinen Strategie s_i zuordnet.

Beweis: Sei Γ ein extensives Spiel mit perfekter Erinnerung. Dann gilt:

$$h \in I \Rightarrow (h, h') \notin I \ \forall h' \neq \emptyset$$

Ein Spieler kann ja bei perfekter Erinnerung h und (h, h') unterscheiden, denn (h, h') ist im Spielverlauf zeitlich später als h.
Zu jeder Verhaltensstrategie β_i eines Spielers i in einem solchen Spiel Γ ist folgende gemischte Strategie σ_i ausgangsäquivalent:
Die Wahrscheinlichkeit, die jeder reinen Strategie s_i von Spieler i zugeordnet wird, ist:

$$\sigma_i(s_i) = \mathbb{P}(X_I = s_i(I)), I \in \mathcal{I}_i) = \prod_{I \in \mathcal{I}_i} \mathbb{P}(X_I = s_i(I)) \tag{3.1}$$

$$= \prod_{I \in \mathcal{I}_i} \beta_i(I)(s_i(I)), \quad s_i(I) = s_i(h) \ \forall h \in I, I \in \mathcal{I}_i \tag{3.2}$$

$\beta_i(I)(s_i(I))$ ist ja gerade die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler i an seiner Informationsmenge I genau die Aktion auswählt, die auch seine reine Strategie s_i wählen würde. $\square$

Wir wollen das soeben Bewiesene nun direkt auf unser Beispiel vom Streichholzspiel in Abbildung 1 anwenden.
Da Spieler 2 nur eine Informationsmenge hat, ist die Verhaltensstrategie auch direkt gleich der gemischten Strategie.
Betrachte nun Spieler 1. Seine Verhaltensstrategie β_1 ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\{ja, nein\}$ und ein Verteilung über $\{r', l'\}$, also

$$\beta_1 = ((p, 1-p), \ (q, 1-q)).$$

Insgesamt hat Spieler 1 die vier reinen Strategien $s_1 = (ja, r'), \ s_2 = (ja, l')$, $s_3 = (nein, r')$ und $s_4 = (nein, l')$.
Mit 3.2 bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(s_1) &= \prod_{I \in \{\emptyset, \{(ja,r),(ja,l)\}\}} \beta_1(I)(s_1(I)) \\
&= \beta_1(\emptyset)(ja) \cdot \beta_1(\{(ja, r), (ja, l)\})(r') \\
&= p \cdot q
\end{aligned}$$

Analog berechen sich $\sigma_1(s_2), \sigma_1(s_3)$ und $\sigma_1(s_4)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(s_2) &= p \cdot (1-q) \\
\sigma_1(s_3) &= \beta_1(\emptyset)(nein) \cdot \beta_1(\{(ja, r), (ja, l)\})(r') \\
&= (1-p) \cdot q \\
\sigma_1(s_4) &= (1-p) \cdot (1-q)
\end{aligned}$$

Nun haben wir für alle abgeschlossenen Verläufe die gleichen Wahrscheinlichkeiten sowohl bei β_1 als auch bei σ_1. (Es kommt natürich darauf an, welche reine Strategie Spieler 2 wählt. Wählt er die Strategie r, so haben die abgeschlossenen Verläufe (ja, l, r') und (ja, l, l') Wahrscheinlichkeit 0 und die Wahrscheinlichkeiten für die anderen abgeschlossenen Verläufe h ergeben sich aus den Rechnungen als Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu h konsistenten reinen Strategien von Spieler 1.)

Proposition 3.1 (Satz von Kuhn) Für jede gemischte Strategie σ_i eines Spielers i in einem endlichen Spiel Γ mit perfekter Erinnerung gibt es eine ausgangsäquivalente Verhaltensstrategie β_i.

Beweis: Sei σ_i eine gemischte Strategie von Spieler i, seien $h, h' \in I$ zwei Verläufe und sei $a \in A(h)$.
Da $h, h' \in I$, folgt $A(h) = A(h')$ und mit perfekter Erinnerung auch $\pi_i(h) = \pi_i(h')$. (h und h' unterscheiden sich nur in Aktionen anderer Spieler. Dies hat keine Auswirkungen darauf, ob eine reine Strategie von Spieler i konsistent zu h oder h' ist.)
Für die reine Strategie s_i gilt $s_i(h) = a$ genau dann, wenn $s_i(h') = a$ und damit ist auch $\pi_i(h, a) = \pi_i(h', a)$. Somit können wir eine Verhaltensstrategie β_i für Spieler i definieren mit:

$$\beta_i(I)(a) = \frac{\pi_i(h, a)}{\pi_i(h)}, \quad h \in I, \ \pi_i(h) > 0^7 \tag{3.3}$$

Behauptung : β_i ist ausgangsäquivalent zu σ_i.

Wir müssen zeigen: Für jeden abgeschlossenen Verlauf h haben β_i und σ_i den gleichen Ausgang.
Sei s_{-i} ein Strategieprofil reiner Strategien von allen Spielern in $N \backslash \{i\}$.[8]

i) Mindestens eine Strategie s_j eines Spielers $j \neq i$ aus s_{-i} ist inkonsistent mit dem Verlauf h. Dann ist schon $O(s_{-i}, \sigma_i) = 0$ für alle Strategien von Spieler i, also auch $O(s_{-i}, \beta_i) = 0$ und es ist nichts zu zeigen.

ii) Für alle $s_j \in s_{-i}$ ist s_j konsistent mit h.

    (a) Der Verlauf h enthält eine Aktion a nach einer Anfangssequenz $h' \in I$, sodass σ_i inkonsistent mit h ist, also $O(s_{-i}, \sigma_i)$. Also,

$$\sigma_i(s_i) > 0 \ \forall s_i \ \textit{konsistent mit} \ h \Rightarrow \pi_i(h) = 0 \Rightarrow O(s_{-i}, \sigma_i) = 0$$

[7] Für $\pi_i(h) = 0$ sei $\beta_i(I)(a) = 0$.

[8] Wir lassen Zufallszüge bewusst außen vor, da wir für die Ausgangsäquivalenz eine Zusammensetzung von reinen Strategien der Spieler brauchen. Der Zufall hat aber nur eine reine Strategie, wenn er an jeder seiner Informationsmengen die komplette Wahrscheinlichkeitsmasse auf eine Aktion setzt. Dann kann er wie ein ganz normaler Spieler mit einer reinen Strategie betrachtet werden.

Also ist $\pi_i(h', a) = 0$ und somit auch $\beta_i(I)(a) = 0$. Dann folgt aber direkt $O(s_{-i}, \beta_i) = 0$.

(b) Sei schließlich σ_i konsistent mit h. Dann ist $\pi_i(h') > 0$ für alle Anfangssequenzen h' von h und

$$O(s_{-i}, \beta_i)(h) = \prod_{(h',a) \in H} \frac{\pi_i(h', a)}{\pi_i(h')}, \; a \in A(h')$$

Seien jetzt $h^1, h^2, ..., h^n$ alle Anfangssequenzen von h, an deren Ende Spieler i eine Entscheidung treffen muss.[9]

$$\begin{aligned}
O(s_{-i}, \beta_i)(h) &= \prod_{(h',a) \in H} \frac{\pi_i(h', a)}{\pi_i(h')} \\
&= \frac{\pi_i(h^1, a^1)}{\pi_i(h^1)} \cdot \frac{\pi_i(h^2, a^2)}{\pi_i(h^2)} \cdots \frac{\pi_i(h^n, a^n)}{\pi_i(h^n)} \\
&= \frac{\pi_i(h^1, a^1)}{\underbrace{\pi_i(h^1)}_{=1}} \cdot \frac{\pi_i(h^2, a^2)}{\pi_i(h^1, a^1)} \cdots \frac{\pi_i(h)}{\pi_i(h^n, a^n)} \\
&= \pi_i(h) \\
&= O(s_{-i}, \sigma_i)(h)
\end{aligned}$$

$\pi_i(h^1) = 1$, da Spieler i in der Anfangssequenz h^1 noch keine Entscheidung getroffen hat. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner mit h^1 konsistenten Strategien ist also immer noch 1. Somit haben wir für jede gemischte Strategie σ_i eine ausgangsäquivalente Verhaltensstrategie β_i gefunden. □

Wir kommen nun noch einmal zurück auf das Beispiel in Abbildung 1. Spieler 1 hat die reinen Strategien $(ja, r'), (ja, l'), (nein, r')$ und $(nein, l')$. Betrachte die gemischte Strategie $\sigma_1 = (\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$.
Um die Verhaltensstrategie β_1 zu bestimmen, wenden wir die Formel 3.3 an und

[9] Muss Spieler i nach einer Anfangssequenz h' keine Entscheidung treffen, so sind $\pi_i(h')$ und $\pi_i(h', a)$ gleich und $\frac{\pi_i(h',a)}{\pi_i(h')} = 1$.

erhalten:

$$\begin{aligned}
\beta_1(\emptyset)(ja) &= \frac{\pi_1(\emptyset, ja)}{\pi_1(\emptyset)} \\
&= \frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}}{1} \\
&= \frac{\frac{5}{8}}{1} \\
\beta_1(\emptyset)(nein) &= \frac{\pi_1(\emptyset, nein)}{\pi_1(\emptyset)} \\
&= \frac{3}{8} \\
\beta_1(\{(ja,r),(ja,l)\})(r') &= \frac{\pi_1((ja,r),r')}{\pi_1(ja,r)} \\
&= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5} \\
\beta_1(\{(ja,r),(ja,l)\})(l') &= \frac{\pi_1((ja,r),l')}{\pi_1(ja,r)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Wir bekommen für Spieler 1 also die ausgangsäquivalente Verhaltensstrategie $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$, $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ über den Aktionsmengen $\{ja, nein\}$ und $\{r', l'\}$.

Beispiel 3.1 In einem extensiven Spiel mit imperfekter Erinnerung kann es durchaus eine gemischte Strategie geben, für die es keine ausgangsäquivalente Verhaltensstrategie gibt. Betrachten wir dafür Abbilung 3.

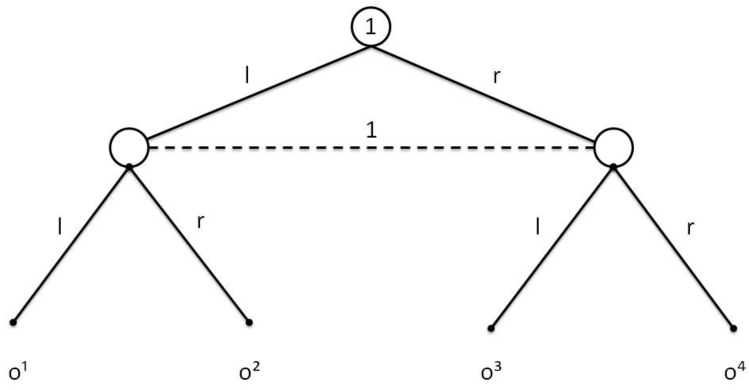

Abbildung 3: Extensives Spiel mit imperfekter Erinnerung, bei dem gemischte Strategien und Verhaltensstrategien nicht ausgangsäquivalent sind.

Angenommen, Spieler 1 wählt die gemischte Strategie σ, wobei er jeweils ll und rr mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wählt.
Behauptung: Die gemischte Strategie σ hat keine ausgangsäquivalente Verhaltensstrategie.
Der Ausgang dieser gemischten Strategie ist $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ über den abgeschlossenen Verläufen ll, lr, rl, rr. Eine Verhaltensstrategie für das Spiel sieht in jedem Fall so aus:

$$((p, 1-p),\ (q, 1-q)),\ p, q \in [0, 1]$$

Somit ist der Ausgang der Verhaltensstrategie

$$(p \cdot q,\ p \cdot (1-q),\ (1-p) \cdot q,\ (1-p) \cdot (1-q)).$$

Da die Wahrscheinlichkeit von lr gleich Null sein muss, ist entweder $p = 0$ oder $q = 1$, was aber zur Folge hat, dass die Wahrscheinlichkeit von ll oder rr gleich 0 ist. Also können wir keine ausgangsäquivalente Verhaltensstrategie finden.

4 Fazit

Heute haben wir eine Möglichkeit kennengelernt, in der Spieltheorie Situationen zu modellieren, in denen Informationsasymetrien herrschen. Wir können nun Spiele beschreiben, in denen Spieler nicht alle Informationen über den bisherigen Spielverlauf haben. Sie können zum Beispiel beim Streichholzspiel manche Züge nicht beobachten. Außerdem ist es möglich, dass manche Spieler Wissen nicht von einem Zeitpunkt im Spiel zum nächsten Zeitpunkt transportieren können, also imperfekt erinnern.
Wenn ein Spiel allerdings perfekte Erinnerung hat, so gibt es zu jeder gemischten Strategie eine Verhaltensstrategie, die den gleichen Spielausgang hervorbringt. Das bedeutet, dass sich die Spieler von nun an nicht mehr zu Beginn eines Spiels für eine Strategie entscheiden müssen, sondern auf jeder ihrer Informationsmengen, unabhängig von den vorigen Spielzügen, neu eine Aktion auswählen können.
Insgesamt haben wir also wertvolle Eindrücke über die extensiven Spiele mit imperfekter Information erlangt und können auf dieses Wissen noch weitere Aspekte der Spieltheorie aufbauen.