Neutrale kombinatorische Spiele

Vortrag zum Seminar „Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie“

Oskar Braun

10. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Einführung **2**

3 Das Nim-Spiel **4**

4 Graphenspiele und die Sprague-Grundy Funktion **7**

5 Summen von kombinatorischen Spielen **8**

6 Grünes Hackenbush **10**

6.1 Halme 10
6.2 Bäume 10
6.3 Allgemeine verwurzelte Graphen 11

1 Einleitung

Kombinatorische Spiele sind eine bestimmte Klasse von extensiven Spielen mit perfekter Information, die immer zwischen zwei Spielern ausgetragen werden. Als Resultate gibt es für die stets abwechselnd ziehenden Spieler jeweils nur Sieg oder Niederlage. Es gibt eine Menge von Spielpositionen und zu Beginn sind eine Startposition und der beginnende Spieler festgelegt. Außerdem bestimmen die Regeln des Spiels, welche Übergänge zwischen Positionen, d.h. welche Züge für die Spieler erlaubt sind. Wird eine Position erreicht, in der keine Züge mehr möglich sind, so wird einem der Spieler der Sieg zugeschrieben, dem anderen die Niederlage. Zusätzlich endet ein Spiel stets nach endlich vielen Zügen.

Unter diese Klasse fallen - abgesehen von der Existenz eines Unentschiedens als Resultat - auch bekannte Spiele wie z.B. Schach, Dame, Vier gewinnt, etc. Diese Spiele sind sogenannte nicht neutrale kombinatorische Spiele, bei denen die möglichen Züge in einer Position davon abhängen, welcher Spieler am Zug ist.

In diesem Vortrag geht es jedoch um neutrale Spiele, in denen die möglichen Züge nur durch die jeweilige Position bestimmt sind. Nach einer kurzen Einführung wird das wichtige Nim-Spiel vorgestellt und mit Hilfe der Nim-Addition und des Theorems von Bouton untersucht. Danach werden neutrale kombinatorische Spiele auf Graphen und Summen von Graphen betrachtet. Für ihre Analyse wird die Sprague-Grundy Funktion eingeführt und das Theorem von Sprague-Grundy bewiesen. Zum Abschluss gibt es noch eine Einführung in ein sehr instruktives Graphenspiel namens Grünes Hackenbush.

2 Einführung

Definition 1 (Neutrales kombinatorisches Spiel)**.**
Ein *neutrales kombinatorisches Spiel* ist ein extensives Spiel $G = (N, H, P, (\succeq_1, \succeq_2))$ mit perfekter Information mit Auszahlungsfunktionen u_1, u_2, für das folgendes gilt:

1. $N = \{1, 2\}$.
2. Für jeden offenen Verlauf $h \in H$ gilt: $P(h) = (|h| \bmod 2) + 1$.
3. Sei $h \in H$ ein abgeschlossener Verlauf, dann ist $u_1(h) = |h| \bmod 2$ und $u_2(h) = (|h| + 1) \bmod 2$.
4. Es existiert eine Partition $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ von H mit $A(h) = A(h')$ für alle $h, h' \in z_i$. Die $(z_i)_{i \geq 1}$ heißen Spielpositionen.
5. Für alle $h \in H$ gilt: $|h| \in \mathbb{N}$.

Bemerkung.
Anschaulich kann man ein neutrales kombinatorisches Spiel folgendermaßen beschreiben: Zwei Spieler ziehen immer abwechselnd. Es gibt eine Menge von Spielpositionen mit einer festgelegten Startposition und für jede Spielposition existiert

eine Menge von möglichen Zügen, d.h. Übergängen zu anderen Positionen; diese ist unabhängig davon, welcher Spieler am Zug ist. Wird eine sogenannte *terminale Position* erreicht, in der keine Züge mehr möglich sind, so hat der Spieler gewonnen, der den letzten Zug gemacht hat. Das Spiel endet nach einer endlichen Anzahl von Zügen.

- Hängt die Menge der möglichen Züge in einer Position nicht nur von der Position ab, sondern auch davon, welcher Spieler am Zug ist, so haben wir ein nicht neutrales kombinatorisches Spiel.
- Die dritte Bedingung wird normale Spielregel genannt. Im Gegensatz dazu steht die Misère Spielregel, bei der der Spieler verliert, der den letzten Zug macht.
- Die fünfte Bedingung heißt Endbedingung und wird für neutrale Spiele nicht zwingend vorausgesetzt, in diesem Vortrag allerdings schon.

Beispiel (Subtraktionsspiel, $S = \{2, 3\}$)**.**
Auf einem Tisch liegen $m = 24$ Münzen. Die Spieler dürfen abwechselnd jeweils 2 oder 3 Münzen wegnehmen und es beginnt Spieler 1. Kann ein Spieler nicht mehr ziehen, so hat er verloren und der andere gewonnen. Man kann sich nun mehrere Fragen stellen: Kann einer der beiden Spieler einen Sieg erzwingen? Wenn ja, welcher? Wie sähe hierfür eine Gewinnstrategie aus?

Auch ohne die Mittel, die wir im späteren Verlauf des Vortrages kennenlernen werden, können wir dieses Spiel mit einer naheliegenden Methode analysieren - der Rückwärtsinduktion: Wir beginnen bei einfachen Stellungen mit wenigen Münzen, heben die Anzahl der Münzen Schritt für Schritt an und untersuchen, zu welchen bereits analysierten Positionen wir in einem Zug wechseln können. Klarer wird dies mit den folgenden Begriffen:

N- und P-Positionen

Eine Position heißt *N-Position*, wenn der Spieler, der am Zug ist, einen Sieg erzwingen kann. Kann der Spieler, der als letztes am Zug war, einen Sieg erzwingen, so heißt sie *P-Position*.

Mit folgendem induktiven Algorithmus kann man zu jeder Position herausfinden, ob sie eine N- oder P-Position ist:

- Schritt 1: Markiere jede terminale Position als P-Position.
- Schritt 2: Markiere jede Position, von der aus man eine P-Position in einem Zug erreichen kann, als N-Position.
- Schritt 3: Markiere jede Position, von der aus man in jedem Zug nur zu markierten N-Positionen wechseln kann, als P-Position.

- Schritt 4: Wurden in Schritt 3 neue P-Positionen gefunden, gehe zurück zu Schritt 2. Ansonsten beende den Algorithmus.

Aus diesem Algorithmus folgt auch, dass jede Position entweder eine N- oder P-Position ist.

Beispiel (Subtraktionsspiel, $S = \{2, 3\}$)**.**
Betrachten wir nun noch einmal das obige Beispiel: Liegen gar keine oder nur eine Münze auf dem Tisch, so ist kein Zug möglich und man verliert, also sind die Positionen mit $m = 0$ und $m = 1$ Münzen P-Positionen. Für $m = 2$ und $m = 3$ kann man jeweils 2 Münzen wegnehmen und so eine P-Position erreichen, ebenso kann man für $m = 4$ genau 3 Münzen mit dem gleichen Ergebnis wegnehmen. Diese sind also N-Positionen. Für $m = 5$ erreicht man mit beiden möglichen Zügen jeweils eine N-Position, genauso für $m = 6$, d.h. es sind beides P-Positionen.

Macht man in diesem Sinne weiter, so bekommt man:

Position	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Positionstyp	P	P	N	N	N	P	P	N	N	N	P	P	N	N	N	...

Man sieht: Eine Position mit m Münzen ist genau dann eine P-Position, wenn

- $m \equiv 0 \bmod 5$, oder
- $m \equiv 1 \bmod 5$.

Charakteristische Eigenschaft von N- und P-Positionen

Man kann N- und P-Positionen folgendermaßen rekursiv definieren:

1. Alle terminalen Positionen sind P-Positionen.
2. Von jeder N-Position gibt es einen Zug zu einer P-Position.
3. Von jeder P-Position führt jeder Zug zu einer N-Position.

3 Das Nim-Spiel

Betrachten wir ein für die Theorie von neutralen kombinatorischen Spielen sehr fundamentales Spiel - das Nim-Spiel:

Nim-Spiel

Es gibt n Stapel, die $m_1, \ldots, m_n$ Münzen enthalten. Jeder Spieler darf in einem Zug von genau einem Stapel eine beliebige Menge von Münzen entfernen, jedoch mindestens eine. Der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt.

Wir betrachten ein Beispiel hierfür: Sei $n = 3$, d.h. wir haben 3 Stapel mit beispielsweise 6, 9, bzw. 12 Münzen. Welcher Spieler gewinnt hier und wie sieht seine Gewinnstrategie aus?

Während Nim für $n = 1$ trivial und für $n = 2$ immer noch leicht zu untersuchen ist (P-Positionen sind die Positionen, in denen beide Stapel gleich groß sind), wird es ab einer Anzahl von 3 Stapeln bedeutend komplexer. Im Vergleich zum Subtraktionsspiel im letzten Kapitel haben wir nun in fast jeder Position eine große Menge an möglichen Zügen. Wir können also nicht mehr einfach durch Rückwärtsinduktion die N- und P-Positionen bestimmen. Für die genaue Analyse dieses Spiels benötigen wir die Nim-Addition:

Definition 2 (Nim-Summe)**.**
Seien $x, y \in \mathbb{N}$ und $(x_m \cdots x_0)_2, (y_m \cdots y_0)_2$ ihre Binärdarstellungen, so ist ihre *Nim-Summe* $x \oplus y$ definiert als

$$x \oplus y = (x_m \cdots x_0)_2 \oplus (y_m \cdots y_0)_2 := (z_m \cdots z_0)_2$$

mit $z_k = x_k + y_k \bmod 2$ für alle $0 \leq k \leq m$.

Beispiel (Nim-Addition)**.**
Um die Definition zu veranschaulichen, bilden wir nun die Nim-Summe aus 6, 9 und 12. Die Binärdarstellungen sind $6 = (0110)_2$, $9 = (1001)_2$ bzw. $12 = (1100)_2$ und wir schreiben diese untereinander (wir sagen, wir berechnen die Nim-Summe spaltenweise nach den Spalten der Binärdarstellungen):

$$\begin{array}{rl} & (0110)_2 \\ \oplus & (1001)_2 \\ \oplus & (1100)_2 \\ = & (0011)_2 = 3 \end{array}$$

Bemerkung.
Die Nim-Addition ist assoziativ, kommutativ und 0 ist ein neutrales Element. Für $x \in \mathbb{N}$ gilt stets $x \oplus x = 0$. Daher gilt die Kürzungsregel:

$$x \oplus y = x \oplus z \implies x \oplus x \oplus y = x \oplus x \oplus z \implies y = z$$

Die natürlichen Zahlen mit der Nim-Addition bilden also eine abelsche Gruppe.

Theorem (Bouton)**.**
Eine Position $(m_1, \ldots, m_n)$ im Nim-Spiel mit n Stapeln ist genau dann eine P-Position, wenn $m_1 \oplus \cdots \oplus m_n = 0$ gilt.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Positionen mit Nim-Summe 0 und $\mathcal{N}$ die Menge aller Positionen mit Nim-Summe > 0. Überprüfen wir nun die charakteristischen Eigenschaften von N- und P-Positionen in Bezug auf $\mathcal{N}$ und $\mathcal{P}$:

1. Alle terminalen Positionen sind in $\mathcal{P}$:

   Das ist richtig, da es nur die terminale Position $(0, \ldots, 0)$ gibt und ihre Nim-Summe 0 ist.

2. Von jeder Position in $\mathcal{N}$ gibt es einen Zug zu einer Position in $\mathcal{P}$:

   Sei $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathcal{N}$. Wir konstruieren einen solchen Zug. Zunächst schreiben wir die Nim-Summe $m_1 \oplus \cdots \oplus m_n$ spaltenweise nach den Spalten der Binärdarstellungen der m_i und suchen die höchstwertige Spalte (d.h. die Spalte zu der höchsten Zweierpotenz) mit einer ungeraden Anzahl an Einsen – diese existiert, da $m_1 \oplus \cdots \oplus m_n > 0$ ist. Wir wählen uns ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass m_i in dieser Spalte eine 1 hat. Nun ändern wir die 1 in dieser Spalte zu einer 0 und alle Werte in der Binärdarstellung von m_i rechts davon so, dass in jeder Spalte der Nim-Addition eine gerade Anzahl an Einsen steht. Dies verkleinert die Zahl m_i, da in der höchstwertigen Spalte, die wir verändert haben aus einer 1 eine 0 wurde. Es ist also ein erlaubter Zug und die neue Position liegt in $\mathcal{P}$.

3. Von jeder Position in $\mathcal{P}$ führt jeder Zug zu einer Position in $\mathcal{N}$:

   Sei $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathcal{P}$ und oBdA werde nun m_1 reduziert zu m_1'. Würde nun

   $$m_1' \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n = 0 = m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n$$

   gelten, so würde durch die Kürzungsregel $m_1' = m_1$ impliziert werden.

   $$\implies m_1' \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n \neq 0 \implies (m_1', \cdots, m_n) \in \mathcal{N}$$

Insgesamt folgt, dass $\mathcal{P}$ die Menge aller P-Positionen ist. ■

Mit Hilfe dieses Theorems können wir nun für jede Position in einem Nim-Spiel mit beliebig vielen Stapeln entscheiden, ob sie eine N- oder eine P-Position ist. Der Beweis liefert uns sogar eine konkrete Gewinnstrategie, falls eine N-Position vorliegt.

Beispiel (Nim-Spiel, $n = 3$)**.**
Wir haben also 3 Stapel mit 6, 9 bzw. 12 Münzen. Wie oben schon berechnet ist $6 \oplus 9 \oplus 12 = 3$. Es liegt also eine N-Position vor und wenn wir einen Zug finden, der die Nim-Summe zu 0 ändert, so ist dies ein Gewinnzug. Betrachten wir die Rechnung oben noch einmal, so sehen wir, dass die höchstwertige Spalte mit einer ungeraden Anzahl an Einsen die zweite von rechts ist, die den Anteil der Potenz 2^1 angibt. Es gibt nur eine Zahl mit einer 1 dort, nämlich die 6. Also haben wir keine Auswahl. Wir ändern diese 1 zu einer 0 ab und damit die Nim-Summe 0 wird, müssen wir die 0 an der ganz rechten Stelle der Binärdarstellung der 6 in eine 1 abändern:

$$\begin{array}{rl} & (0101)_2 \\ \oplus & (1001)_2 \\ \oplus & (1100)_2 \\ = & (0000)_2 = 0 \end{array}$$

Aus der 6 wird eine 5 und genau das ist der Zug, nach dem wir im Folgenden einen Sieg erzwingen können, unabhängig davon, was unser Gegner zieht. Im weiteren Verlauf des Spieles wird durch Züge des Gegners die Nim-Summe der Stapelgrößen immer wieder auf einen Wert $\neq 0$ geändert und unsere Züge bestehen darin, wieder eine P-Position mit Nim-Summe 0 zu erreichen. Schlussendlich erreichen wir durch einen Zug die terminale Position, in der kein Stapel mehr Münzen enthält und unser Gegner nicht mehr ziehen kann. Wir gewinnen also.

4 Graphenspiele und die Sprague-Grundy Funktion

Man kann neutrale kombinatorische Spiele auch als Spiele auf einem gerichteten Graphen modellieren.

Definition 3 (Gerichteter Graph).
Ein *gerichteter Graph* $G = (Z, F)$ besteht aus einer Menge $Z \neq \emptyset$ von *Knoten* und einer Funktion $F : Z \to \mathcal{P}(Z)$. Für $z \in Z$ und $y \in F(z)$ heißt das Paar (z, y) eine *Kante* von G und y heißt *Nachfolger* von z.

Bemerkung.
Die Knoten eines gerichteten Graphen können als Spielpositionen gesehen werden. Für ein $z \in Z$ gibt $F(z)$ die möglichen Züge an, d.h. wir interpretieren die Kanten als Züge.

Gespielt wird, indem ein Startknoten z_0 festgelegt wird und Spieler 1 beginnt. Die Spieler wählen nun abwechselnd je eine Kante des Graphen, bis ein Spieler zu einem Knoten z gelangt, so dass $F(z) = \emptyset$ ist. Der Spieler der am Zug ist verliert dann.

Definition 4 (Pfad, progressiv beschränkter Graph).
Sei $G = (Z, F)$ ein gerichteter Graph, $z_0 \in Z$. Ein *endlicher Pfad* von z_0 ist eine Folge $(z_0, \dots, z_m)$ mit $z_i \in F(z_{i-1})$ für $1 \leq i \leq m < \infty$. Hierbei heißt m die *Länge* des Pfades. Gilt $z_0 = z_m$, so nennen wir den Pfad einen *Zykel*. Ein *unendlicher Pfad* von z_0 ist eine Folge $(z_0, z_1, \dots)$ mit $z_{i+1} \in F(z_i)$ für $i \in \mathbb{N}$, seine Länge ist ∞. Ein gerichteter Graph heißt *progressiv beschränkt*, falls für jedes $z_0 \in Z$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass jeder Pfad von z_0 eine Länge $\leq n$ hat.

Für die Untersuchung von Spielen auf Graphen führen wir nun die Sprague-Grundy Funktion ein, deren Nutzen im nächsten Kapitel klar wird:

Definition 5 (Sprague-Grundy Funktion).
Für einen gerichteten Graphen $G = (Z, F)$ ist die Sprague-Grundy Funktion $g : Z \to \mathbb{N}$ induktiv definiert als:

$$g(z) = \min\{n \geq 0 : n \neq g(y) \text{ für alle } y \in F(z)\}$$

Dabei heißt $g(z)$ Sprague-Grundy Wert von z.

Beispiel (Sprague-Grundy Funktion eines Nim-Stapels).
Angenommen, es liegt ein Nim-Stapel (d.h. ein Nim-Spiel mit $n = 1$) vor. Für die Sprague-Grundy Funktion g behaupten wir $g(m) = m$ und beweisen dies per Induktion nach der Anzahl m der Münzen:

Induktionsanfang, $m = 0$: Diese Position hat keinen Nachfolger, also ist $g(0) = 0$.

Induktionsschritt, $m \geq 1$: Die möglichen Züge bestehen darin $1, \ldots, m$ Münzen zu entfernen, was uns zu einer Position mit $m-1, \ldots, 0$ Münzen führt. Deren Sprague-Grundy Wert ist nach Induktionsvoraussetzung jeweils $m-1, \ldots, 0$. Damit folgt $g(m) = m$.

Bemerkung.

- Für progressiv beschränkte Graphen existiert die Sprague-Grundy Funktion, sie ist wohldefiniert und endlich.
- Für einen Knoten z beobachtet man:
  1. Ist z eine terminale Position, so gilt $g(z) = 0$.
  2. Ist $g(z) = 0$, so gilt für jedes $y \in F(z)$, dass $g(y) \neq 0$ ist.
  3. Ist $g(z) \neq 0$, so existiert ein $y \in F(z)$, so dass $g(y) = 0$ ist.

  Mit Hilfe der charakteristischen Eigenschaft von N- und P-Positionen folgert man nun: Ein Knoten z ist genau dann eine P-Position, wenn $g(z) = 0$ ist.
- Man kann die Sprague-Grundy Funktion auf andere Graphen anwenden, z.B. auf sogenannte progressiv endliche Graphen (d.h. jeder Pfad hat eine endliche Länge) und sogar auf manche Graphen mit Zykeln. Dafür muss man den Wertebereich der Sprague-Grundy Funktion von natürlichen Zahlen zu Ordinalzahlen ausdehnen. Siehe hierzu z.B. [Fer].

5 Summen von kombinatorischen Spielen

In diesem Kapitel werden wir Summen von Spielen auf Graphen untersuchen und hierzu das Sprague-Grundy Theorem beweisen – das Hauptergebnis dieses Vortrages.

Definition 6 (Summe von n Spielen auf Graphen)**.**
Seien $G_1 = (Z_1, F_1), \ldots, G_n = (Z_n, F_n)$ progressiv beschränkte Graphen. Die Summe $G = (Z, F) =: G_1 + \cdots + G_n$ von $G_1, \ldots, G_n$ wird folgendermaßen gebildet:

$$Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_i \in Z_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

Für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in Z$ gilt:

$$F(z) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z_1\} \times \cdots \times F_i(z_i) \times \cdots \times \{z_n\}$$

Der Graph G ist ebenfalls progressiv beschränkt. In der Position $z = (z_1, \ldots, z_n)$ in dem Spiel G besteht ein Zug darin, zu genau einem z_i ein $y_i \in F_i(z_i)$ auszuwählen, also eine Kante in genau einer Komponente von G.

Theorem (Sprague-Grundy)**.**
Seien $G_1, \dots, G_n$ progressiv beschränkte Graphen mit Sprague-Grundy Funktionen $g_1, \dots, g_n$, so hat die Summe $G = G_1 + \dots + G_n$ die Sprague-Grundy Funktion g, definiert durch:

$$g(z) = g(z_1, \dots, z_n) = g_1(z_1) \oplus \dots \oplus g_n(z_n)$$

Beweis. Sei $z = (z_1, \dots, z_n) \in Z$ und $b = g_1(z_1) \oplus \dots \oplus g_n(z_n)$. Wir zeigen nun:

1. $\forall\, a \in \mathbb{N}, a < b \implies \exists\, y \in F(z) : g(y) = a.$
2. $\forall\, y \in F(z) : g(y) \neq b.$

Daraus folgt unmittelbar, dass $g(z) = b$ ist. Der Beweis dieser beiden Punkte geschieht induktiv über die Folgepositionen.

1. Sei $d = a \oplus b$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} \leq d < 2^k$, d.h. d hat eine 1 an der k-ten Stelle von rechts in der Binärdarstellung. Wegen $a < b$, hat b ebenfalls eine 1 an der k-ten Stelle der Binärdarstellung, während bei a dort eine 0 steht. Da $b = g_1(z_1) \oplus \dots \oplus g_n(z_n)$ ist, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $g_i(z_i)$ eine 1 an der k-ten Stelle der Binärdarstellung hat. OBdA sei $i = 1$. Wegen $d \oplus g_1(z_1) < g_1(z_1)$ gibt es einen Zug von z_1 zu einem z_1' mit $g_1(z_1') = d \oplus g_1(z_1)$ und damit auch einen Zug von $(z_1, \dots, z_n)$ zu $(z_1', z_2, \dots, z_n)$ in G. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt:
$$\begin{aligned} g(z_1', z_2, \dots z_n) &= g_1(z_1') \oplus g_2(z_2) \oplus \dots \oplus g_n(z_n) \\ &= d \oplus g_1(z_1) \oplus \dots \oplus g_n(z_n) = d \oplus b = a \end{aligned}$$

2. Angenommen es gibt ein $y \in F(z)$ mit $g(y) = b$. Es sei oBdA $y = (z_1', z_2, \dots, z_n)$.
$$\implies g_1(z_1') \oplus g_2(z_2) \oplus \dots \oplus g_n(z_n) = g_1(z_1) \oplus \dots \oplus g_n(z_n)$$
Die Kürzungsregel impliziert dann $g_1(z_1') = g_1(z_1)$. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Definition des Sprague-Grundy Wertes. ↯

∎

Nun können wir Summen von Spielen auf progressiv beschränkten Graphen auf ihre N- und P-Positionen und bei Vorliegen einer N-Position auf eine Gewinnstrategie hin untersuchen, indem wir einfach die Sprague-Grundy Funktionen der einzelnen Spiele bestimmen und ihre Nim-Summe bilden. Spiele, die auf den ersten Blick sehr komplex sind, lassen sich so zerlegen. Das folgende Korollar zeigt uns, dass es sogar noch einfacher wird und wir jedes Spiel auf einer Summe von progressiv beschränkten Graphen auf das Nim-Spiel zurückführen können.

Definition 7 (Äquivalenz von Spielen)**.** Zwei Spiele G_1, G_2 heißen äquivalent, wenn für jedes Spiel H die Sprague-Grundy Werte der Startpositionen von $G_1 + H$ und $G_2 + H$ gleich sind.

Korollar.
Jedes neutrale Spiel auf einem progressiv beschränkten Graphen ist äquivalent zu einem Nim-Stapel, wobei die Größe des Nim-Stapels dem Sprague-Grundy Wert der Startposition des Spieles entspricht.

6 Grünes Hackenbush

Ein äußerst interessantes kombinatorisches Spiel ist Hackenbush. Dazu führen wir zunächst den Begriff des verwurzelten Graphen ein:

Ein *verwurzelter Graph* ist ein ungerichteter Graph, bei dem mindestens ein Knoten als *Boden* gekennzeichnet ist und jede Kante über einen Pfad mit dem Boden verbunden ist.

Bei Hackenbush besteht ein Zug daraus, aus dem verwurzelten Graphen eine Kante zu entfernen sowie alle, die danach nicht mehr mit dem Boden verbunden sind.

Es gibt verschiedene Versionen dieses Spiels: In der allgemeinen Version sind manche Kanten des Graphen blau, andere rot und der Rest grün markiert. Spieler 1 darf keine roten, Spieler 2 keine blauen Kanten entfernen; grüne Kanten dürfen von beiden Spielern entfernt werden. Ohne grüne Kanten kann man auch blau-rotes Hackenbush spielen, was natürlich ein nicht neutrales Spiel ist. Hier betrachten wir jedoch die neutrale Version, in der es nur grüne Kanten gibt, d.h. dass jeder Spieler alle Kanten entfernen darf.

Für anschauliche Beispiele zu diesem Spiel siehe [Fer] oder [BCG], Kapitel 7.

6.1 Halme

Untersuchen wir zunächst einen einfachen Fall: Ein *Halm* mit m Abschnitten ist ein linearer Graph mit m Kanten und $m+1$ Knoten. Einer der beiden äußeren Knoten – also der beiden Knoten, von denen nur eine Kante abgeht – ist dabei der Boden.

Ein Zug im Hackenbush auf Halmen besteht darin, eine beliebige Kante und alle darüberliegenden zu entfernen. Es ist also nichts anderes als das Nim-Spiel mit einem Stapel und dementsprechend ist Hackenbush auf einer Summe von n Halmen nichts anderes als das Nim-Spiel mit n Stapeln.

6.2 Bäume

Gehen wir von Halmen über zu verwurzelten Bäumen: Ein *verwurzelter Baum* ist ein verwurzelter Graph, so dass von jedem Knoten ein eindeutiger Pfad zum Boden (bei Bäumen auch: Wurzel) führt. Bäume enthalten also keine Zykel.

Da Hackenbush auf einem verwurzelten Baum ein neutrales kombinatorisches Spiel ist, ist es nach dem Sprague-Grundy Theorem äquivalent zum Nim-Spiel mit einem

Stapel. Um den Sprague-Grundy Wert eines verwurzelten Baumes zu bestimmen, benutzen wir die folgende induktive Kolon-Regel:

Satz (Kolon-Regel)**.**
Sei G ein verwurzelter Graph, z ein Knoten in G und H_1, H_2 zwei verwurzelte Bäume mit dem gleichen Sprague-Grundy Wert. Wir definieren $G_1 := G_z : H_1$ und $G_2 := G_z : H_2$, wobei $G_z : H_i$ der Graph ist, der entsteht, indem man H_i mit der Wurzel am Knoten z an G anhängt. Dann haben G_1 und G_2 den gleichen Sprague-Grundy Wert.

Beweis. Seien g_1, g_2, g die Sprague-Grundy Werte von G_1, G_2 bzw. $G_1 + G_2$. Wir werden im Spiel G_1+G_2 eine Gewinnstrategie für Spieler 2 finden, so dass wir wissen, dass eine P-Position vorliegt. Dann würde folgen:

$$g = 0 \implies g_1 \oplus g_2 = 0 \implies g_1 = g_2$$

Die Gewinnstrategie sieht folgendermaßen aus: Entfernt Spieler 1 eine Kante aus G in einem der Teilspiele G_1 bzw. G_2, so entfernt Spieler 2 die gleiche Kante in dem anderen Teilspiel. Entfernt Spieler 1 eine Kante in H_1 oder H_2, so ändert sich damit der Sprague-Grundy-Wert dieses Spieles und es gibt in dem jeweils anderen Spiel einen Zug, der den Sprague-Grundy genauso ändert. Letztendlich wird Spieler 2 so den letzten Zug machen und damit gewinnen. ■

Spielt man nun grünes Hackenbush auf einem verwurzelten Baum und gehen mehrere Zweige an einem Knoten ab, so kann man diese Zweige durch einen Halm mit m Abschnitten ersetzen ohne den Sprague-Grundy Wert des Baumes zu ändern. Dabei ist m die Nim-Summe der Sprague-Grundy Werte der Zweige.

6.3 Allgemeine verwurzelte Graphen

Nun können wir den letzten Schritt machen und zu grünem Hackenbush auf allgemeinen verwurzelten Graphen übergehen. Wieder liegt das Problem darin, den Sprague-Grundy Wert eines verwurzelten Graphen zu bestimmen, wenn er komplizierter als ein Baum ist, also z.B. Zykel hat. Dieses Problem kann man mit der folgenden Fusions-Regel lösen. Dafür benötigen wir noch den Begriff einer Schleife: Eine *Schleife* ist eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet.

Satz (Fusions-Regel)**.**
Spielt man grünes Hackenbush auf einem verwurzelten Graphen, so kann man alle Knoten eines Zykels zu einem Knoten verschmelzen ohne den Sprague-Grundy Wert des Graphen zu verändern. Dabei wird eine Kante zwischen zwei verschmolzenen Knoten zu einer Schleife, die wiederum durch einen Zweig der Länge 1 *ersetzt werden kann.*

Die Fusions-Regel zu beweisen erfordert einigen Aufwand und deswegen wird im Rahmen dieses Vortrages darauf verzichtet, siehe hierzu [BCG], Kapitel 7.

Wir haben also mit Hilfe der Kolon- und der Fusions-Regel ein Konzept gefunden, mit dem wir den Sprague-Grundy Wert jedes beliebigen verwurzelten Graphen berechnen können, indem wir den Graphen zuerst in einen verwurzelten Baum und danach in einen Halm gleichen Sprague-Grundy Wertes transformieren. Somit können wir im Spiel grünes Hackenbush auf einer Summe von verwurzelten Graphen in jeder Position bestimmen, ob eine N- oder eine P-Position vorliegt und kennen im Falle einer N-Position sogar eine Gewinnstrategie.

Literatur

[Fer] T. S. Ferguson: *Game Theory, Part I: Impartial Games*
`http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html`

[BCG] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for your mathematical plays, vol. 1 (1982)*

Online-Links zu kombinatorischen Spielen

- Nim-Spiel
`http://www.dotsphinx.com/games/nim/`
- Chomp!
`http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/chomp.html`
- Fibonacci Nim
`http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/fibonim.html`
- Moore's Nim
`http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/Moore.html`
- Dawson's Schach
`http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/dawson.html`
- Aliquot-Spiel
`http://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/Aliquot.shtml`
- Turnablock
`http://thinks.com/java/turnablock/turnablock.htm`
- Grünes Hackenbush
`http://www.informatik.uni-oldenburg.de/~delwi/hackenbusch/`
- Eine kleine Sammlung verschiedener Spiele
`http://www.chlond.demon.co.uk/JavaJive.html`