Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 12** **25.06.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein Finanzmarktmodell für eine Aktie, dass durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse getrieben wird und nehmen an, dass der Aktienpreisprozess eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 dW_2(t))$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ erfüllt. Weiter wird angenommen, dass es einen konstanten Geldmarktzins $r > 0$ gibt. Damit entwickelt sich das Geldmarktkonto also entsprechend $\beta(t) = \exp(rt)$ für alle $t \geq 0$. Weiter fixieren wir einen Handelszeitraum $[0, T]$.

1. Wieso ist das Modell arbitragefrei?
2. Wieso ist das Modell nicht vollständig?
3. Geben Sie einen hedgebaren Claim und eine Hedgestrategie an.
4. Geben Sie einen Claim an, der nicht hedgebar ist.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten für zwei Aktien bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes, i.e.

$$\begin{array}{rcl} d\beta(t) &=& \beta(t)rdt \quad , \\ dS_1(t) &=& S_1(t)(rdt + \sigma_1 dW_1(t)) \quad , \\ dS_2(t) &=& S_2(t)(rdt + \sigma_2 dW_2(t)) \end{array}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei sind W_1, W_2 stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse.

Bestimmen Sie den Preis für einen europäischen Basket-Put, dessen Auszahlung gegeben ist durch

$$C = (K - (S_1(T) + S_2(T)))^+.$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten einen Bondmarkt mit zufälligen Bondpreisen und gegebener Anfangskurve $(B(0,T)_{T\geq 0})$. Ein Versicherungsunternehmen erhält am Ende eines jeden Jahres über $n+1$ Jahre Versicherungsprämien in Höhe von K Mill. Euro.

1. Über welches Kapital kann das Versicherungsunternehmen am Ende des $n+1$-ten Jahres sicher verfügen, und durch welche Strategie kann dieser Betrag erzielt werden.

2. Was ergibt sich für $n = 9$ und $K = 1$ bei

$$B(0,1) = 0.93, B(0,2) = 0.91, B(0,3) = 0.87, B(0,4) = 0.86, B(0,5) = 0.85,$$
$$B(0,6) = 0.80, B(0,7) = 0.73, B(0,8) = 0.67, B(0,9) = 0.65, B(0,10) = 0.60$$

3. Bestimmen Sie aufgrund der obigen Anfangsbondpreiskurve die heutigen jährlichen Forwardzinssätze. Wie können Sie diese benutzen, um das garantierte Endvermögen zu bestimmen.

Aufgabe 4: Bewertung von Swaps 4 Punkte

Wir betrachten einen Payer-Swap mit Tenorstruktur $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ auf ein Nominal N, der feste Zinsen R in variable tauscht. . Zeigen Sie, dass der Wert $PS(t)$ des Payer-Swaps in $t \leq t_0$ gegeben ist durch

$$PS(t) = NB(t,t_0) - (N \sum_{i=1}^{n} B(t,t_i)R(t_i - t_{i-1}) + NB(t,t_n)).$$

Zeigen Sie ferner, dass auch eine Darstellung der Form

$$PS(t) = \sum_{i=1}^{n} N(t_i - t_{i-1})B(t,t_i)(F(t;t_{i-1},t_i) - R)$$

möglich ist.

Interpretieren Sie beide Bewertungsmöglichkeiten.

Abgabe: Die. 03.07.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

Besprechung: Am Mittwoch, den 04.07.2012. 12.00-14.00 SR1D