

# Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 11

18.06.2012

## Aufgabe 1:

4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Informationsverlauf gegeben durch einen eindimensionalen Wiener-Prozess  $W$  und nehmen an, dass unter einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  die augenblickliche Zinsrate eines Geldmarktkontos sich entwickelt entsprechend

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit  $a, b > 0$ .

Das Geldmarktkonto entwickelt sich also entsprechend

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

für alle  $t \geq 0$ .

Weiter ist in diesem Finanzmarkt eine Aktie mit Preisprozess  $S(t)$  gegeben durch

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \quad , S(0) = x_0 > 0$$

mit  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ .

1. Ist das Modell arbitragefrei?
2. Ist das Modell vollständig?
3. Führen Sie einen Maßwechsel zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^*$  durch und zeigen Sie, dass die Zinsrate  $r$  sich unter  $\mathbb{P}^*$  wie ein Vasicek-Prozess verhält. Wie ändern sich die Parameter?
4. Berechnen Sie für eine Call-Option mit Laufzeit  $T$

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

## Aufgabe 2:

4 Punkte

Wir ersetzen in Aufgabe 1 den Vasicek-Prozess für die Zinsrate durch einen CIR Prozess. Der Prozess  $r$  erfüllt also die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta \sqrt{r(t)} dW(t)$$

mit  $a, b > 0$ . Wir nehmen weiter an, dass  $2ab \geq \delta^2$ .

Ist dieses Modell arbitragfrei? Geben Sie bei positiver Antwort ein äquivalentes Martingalmaß an.

**Aufgabe 3:** Hull White Volatilitätsmodell

6 Punkte

Das stochastische Volatilitätsmodell nach Hull White hat bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes  $\mathbb{P}^*$  die Darstellung

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(r dt + Y_t dW_1(t)), \\ dY_t &= Y_t(\mu dt + \delta dW_2(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

mit unabhängigen Wienerprozessen  $W_1, W_2$ .

1. Lösen Sie die obige stochastische Differentialgleichung.
2. Wird  $\mathbb{P}^*$  als Bewertungsmaß gewählt, so versuchen Sie eine Formel für den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit  $T$  und Basis  $K$  zu finden.
3. Formulieren Sie einen PDE Ansatz mit dem der Preis der Calloption berechnet werden kann.

Gehen Sie bei diesem Modell von einer konstanten Zinsrate  $r > 0$  aus.

**Abgabe:** Die. 25.06.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

**Besprechung:** Am Mittwoch, den 26.06.2012. 12.00-14.00 SR1D