Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **11.06.2012**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Informationsverlauf gegeben durch zwei unabhängige Wiener - Prozesse W_1, W_2 und nehmen an, dass sich unter einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ die augenblickliche Zinsrate eines Geldmarktkontos entwickelt entsprechend

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW_1(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b > 0$.

Das Geldmarktkonto entwickelt sich also entsprechend

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$.

Weiter ist in diesem Finanzmarkt eine Aktie mit Preisprozess $S(t)$ gegeben durch

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_2(t)) \quad , S(0) = x_0 > 0$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

1. Ist das Modell arbitragefrei?
2. Ist das Modell vollständig?
3. Führen Sie einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ durch, so dass die Dynamik der Zinsrate r erhalten bleibt und die Aktie gegeben ist durch

   $$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma d\bar{W}_2(t))$$

   mit Wiener-Prozess $\bar{W}_2$ bezüglich $\mathbb{P}^*$.
4. Berechnen Sie den Preis für eine Call-Option mit Laufzeit T und Strike K, also

   $$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 2: 6 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten für zwei Aktien bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes, i.e.

$$\begin{array}{rcl} d\beta(t) &=& \beta(t)rdt \quad , \\ dS_1(t) &=& S_1(t)(rdt+\sigma_1 dW_1(t)) \quad , \\ dS_2(t) &=& S_2(t)(rdt+\sigma_2 dW_2(t)) \end{array}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei sind W_1, W_2 stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse.

Berechnen Sie eine Hedgestrategie für die Exchangeoption, deren Auszahlung zum Zeitpunkt T gegeben ist durch $(S_2(T) - S_1(T))^+$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Ein durch einen Vasicek-Prozess getriebenes stochastisches Volatilitätsmodell erfüllt bezüglich eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes die folgenden Dynamiken

$$\begin{array}{rcl} dS(t) &=& S(t)(\mu dt + Y_t^2 dW_1(t) \\ dY(t) &=& b(a-Y_t)dt + \delta dW_2(t) \end{array}$$

mit $a, b, \delta > 0$ und unabhängigen Wiener-Prozessen W_1, W_2

1. Wie können Sie zu einem äquivanten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ wechseln, so dass die obige Dynamik bezüglich $\mathbb{P}^*$ erhalten bleibt.
2. Wie kann man vorgehen, um in diesem Modell eine Calloption zu bewerten.

Wir gehen dabei von einer konstanten Zinsrate r für das Bankkonto aus.

Abgabe: Die. 18.06.2012 bis spätestens 11.00 im Fach

Besprechung: Am Mittwoch, den 20.06.2012. 12.00-14.00 SR1D