Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **21.05.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der die usual conditions erfüllt, und W ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}$. Sei ferner $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\theta \neq 0$.

1. Zeigen Sie, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\theta$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$ gibt, so dass $\bar{W}$, definiert durch $\bar{W}_t = W_t - \theta t$ für alle $t \geq 0$, ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_\theta$ definiert.
2. Sei die Filtration $(\mathfrak{F}_t^o)_{t\geq 0}$ definiert durch $\mathfrak{F}_t^o = \sigma\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ für jedes $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\theta$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty^o)$ gibt derart, dass $\bar{W}(t) = W(t) - \theta t, t \geq 0$ ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_\theta$ definiert.

Aufgabe 2: Selbstfinanzierende Handelsstrategien 4 Punkte

In einem allgemeinen Seminartingalmodell für eine Aktie bei einer Wiener-Filtration ist eine Handelsstrategie gegeben durch vorhersehbare Prozesse $(\phi(t))_{0\leq t\leq T}, (H(t))_{0\leq t\leq T}$. Deren Wertprozess ist dann definiert durch

$$V(t) = \phi(t)\beta(t) + H(t)S(t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$. V heißt selbstfinanzierend genau dann, wenn

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \phi(u)d\beta(u) + \int_0^t H(u)dS(u)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gilt.

Zeigen Sie:

1. (ϕ, H) ist selbstfinanzierend genau dann, wenn $V^*(t) = V(0) + \int_0^t H(u)dS^*(u)$ für alle $0 \leq t \leq T$ gilt.
2. Zu jedem vorhersehbaren Prozess H und jedem Anfangskapital x gibt es genau einen vorhersehbaren Prozess ϕ derart, daß (ϕ, H) selbstfinanzierend ist mit abdiskontiertem Wertprozess gegeben durch

$$V_t^* = \frac{V(t)}{\beta(t)} = x + \int_0^t H(u)dS^*(u).$$

Aufgabe 3: Allgemeine Callformel 4 Punkte

Gegeben sei eine Wienerfiltration eines n-dimensionalen Wienerprozesses über einen Handelszeitraum $[0, T]$, ein Bankkontoprozess β der Form

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

mit stetigem adaptierten Zinsratenprozess r und ein positiver Aktienpreisprozess $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ mit stetigen Pfaden.

Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ vorliegt und wollen eine Calloption mit Laufzeit T und Basis K bewerten.

Zeigen Sie, dass es zu $\mathbb{P}^*$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^*$ gibt mit

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)} = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(T) > K) - KB(0, T)\mathbb{P}_2^*(S_T > K),$$

wobei $B(0, T) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}$.

Aufgabe 4: Beschränkung auf zulässige Handelsstrategien 4 Punkte

Wir betrachten ein klassisches Black-Scholes Modell mit konstanter Volatilität $\sigma > 0$ und konstanter Zinsrate $r > 0$ über einen Handelszeitraum $[0, T]$. Bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ hat der Aktienpreisprozess also die Darstellung

$$S(t) = S(0)\exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\exp(rt)$$

für alle $t \geq 0$ für einen Wiener-Prozess W^*. Zeigen Sie, dass es einen vorhersehbaren Prozess H gibt, so dass

$$\int_0^T H_t dS_t^* = 1.$$

Mit Hilfe von H kann also ohne Anfangskapital mit Sicherheit ein positiver Gewinn erzielt werden. Die dazugehörige selbstfinanzierende Handelsstrategie liefert im gewissen Sinne eine Arbitragemöglichkeit für das Black-Scholes Modell. Solch eine Handelsstrategie wird als unzulässig eingeordnet, da eine beliebig hohe Verschuldung in Kauf genommen wird. Betrachtet man nur zulässige Handelsstrategien, ist das Black-Scholes Modell arbitragefrei.

Abgabe: Die. 05.06.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

Besprechung: Am Mittwoch, den 06.06.2012. 12.00-14.00 SR1D