Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **14.05.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

1. Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $\langle M\rangle_\infty < \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Zeigen Sie, dass M_t für $t \to \infty$ $\mathbb{P}$- fast sicher gegen eine reellwertige Zufallsgröße konvergiert.

2. Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, dass die Novikov Bedingung $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty) < \infty$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ gibt mit
$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathfrak{F}_t} = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$$
für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

1. Sei X ein stetiges lokales Martingal mit $\mathbb{P}(X_t > 0) = 1$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann ein lokales Martingal M existiert mit
$$X_t = X_0 \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$$
für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher.

2. Sei $X = M + A$ die Doob-Meyer Zerlegung eines strikt positiven stetigen Submartingals. Seien des Weiteren Y und Z die Lösung der stochastischen Differentialgleichung
$$dY_t = Y_t \frac{1}{X_t}\, dM_t, \quad Y_0 = X_0,$$
bzw.
$$dZ_t = -Z_t \frac{1}{X_t}\, dA_t, \quad Z_0 = 1.$$
Zeigen Sie, dass für $U = Y/Z$ gilt:
$$dU_t = U_t \frac{1}{X_t} dX_t$$
und folgern Sie hieraus, dass $U = X$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

1. **Besselprozess:** Sei W ein n- dimensionaler Wiener-Prozess. Fï¿½r $a \neq 0$ setzen wir $X(t) = a + W(t)$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wiener-Prozess B gibt, so dass $Y(t) = |X(t)|^2$ die stochastische Differentialgleichung

   $$dY(t) = 2\sqrt{Y(t)}dB(t) + ndt$$

   mit Anfangswert $|a|^2$ erfüllt.

   Y heißt quadrierter Besselprozess der Dimension n.

2. **quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess:** Sei X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess und damit Lösung der Gleichung

   $$dX(t) = -X(t)dt + dW(t)$$

   zu einem Startwert $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wienerprozess B gibt, so dass $Y(t) = X(t)^2$ die Gleichung

   $$dY(t) = 1 - 2Y(t)dt + 2\sqrt{Y(t)}dB(t)$$

   zum Anfangswert a^2 löst.

   Y heißt quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess der Dimension 1.

Abgabe: Die. 22.05.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

Besprechung: Am Mittwoch, den 23.05.2012. 12.00-14.00 SR1D